Bureau fédéral du Plan
Analyses et prévisions économiques

WORKING PAPER 12-12

Analyse entrées-sorties

Modèles, Multiplicateurs, Linkages

Septembre 2012

Caroline Hambÿe, ch@plan.be

Avenue des Arts 47-49
1000 Bruxelles

e-mail : contact@plan.be
http://www.plan.be

Le Bureau fédéral du Plan

Le Bureau fédéral du Plan (BFP) est un organisme d'intérêt public.

Le BFP réalise des études sur les questions de politique économique, socio-économique et environnementale. A cette fin, le BFP rassemble et analyse des données, explore les évolutions plausibles, identifie des alternatives, évalue les conséquences des politiques et formule des propositions.

Son expertise scientifique est mise à la disposition du gouvernement, du parlement, des interlocuteurs sociaux, ainsi que des institutions nationales et internationales. Le BFP assure à ses travaux une large diffusion. Les résultats de ses recherches sont portés à la connaissance de la collectivité et contribuent au débat démocratique.

Le Bureau fédéral du Plan est certifié EMAS et Entreprise Ecodynamique (trois étoiles) pour sa gestion environnementale.

url : http://www.plan.be
e-mail: contact@plan.be

Publications

Publications récurrentes :
Perspectives
Le "Short Term Update"

Planning Papers (le dernier numéro) :
L'objet des "Planning Papers" est de diffuser des travaux d'analyse et de recherche du Bureau fédéral du Plan.

111 Comptes de l'environnement pour la Belgique - Comptes économiques de l'environnement 1990-2008
Guy Vandille, Lies Janssen - Septembre 2012

Working Papers (le dernier numéro) :

11-12 Impact sur l'environnement de l'évolution de la demande de transport à l'horizon 2030
Dominique Gusbin, Bruno Hoornaert, Marie Vandresse et VITO - Septembre 2012

Editeur responsable : Henri Bogaert
Dépôt légal : D/2012/7433/32

Bureau fédéral du Plan
Avenue des Arts 47-49, 1000 Bruxelles
tél. : +32-2-5077311
fax : +32-2-5077373
e-mail : contact@plan.be
http://www.plan.be

Analyse entrées-sorties

Modèles, Multiplicateurs, Linkages

Septembre 2012

Caroline Hambÿe, ch@plan.be

Abstract - Depuis 1994, le Bureau fédéral du Plan a dans ses attributions l'estimation des tableaux entrées-sorties quinquennaux pour la Belgique. Ces tableaux représentent un outil unique d'analyse des relations qui existent entre les différentes branches d'activité au sein de l'économie belge. Lorsqu'ils sont intégrés dans un modèle entrées-sorties, ils permettent de fournir rapidement différentes mesures synthétiques de ces relations. Cette étude est consacrée à la présentation de deux applications classiques des modèles entrées-sorties, à savoir les multiplicateurs et les mesures de linkage.

Abstract - Sinds 1994 is het Federaal Planbureau verantwoordelijk voor de raming van de vijfjaarlijkse input-outputtabellen voor België. Die tabellen zijn een uniek instrument om de relaties tussen de verschillende (homogene) bedrijfstakken binnen de Belgische economie te analyseren. Wanneer die tabellen geïntegreerd worden in een input-outputmodel, geven ze snel verschillende synthetische maatstaven van die relaties. In deze paper worden twee klassieke toepassingen van de input-outputmodellen voorgesteld, namelijk de multiplicatoren en de linkagemaatstaven.

Jel Classification - C67, D57

Keywords - Modèles entrées-sorties, Tableaux entrées-sorties, Multiplicateurs, Linkages

Table des matières

Liste des tableaux

Synthèse

Depuis 1994, le Bureau fédéral du Plan a dans ses attributions l'estimation des tableaux entrées-sorties quinquennaux pour la Belgique. Ces tableaux représentent un outil unique d'analyse des relations qui existent entre les différentes branches d'activité (homogènes) au sein de l'économie belge. Lorsqu'ils sont intégrés dans un modèle entrées-sorties, ils permettent de fournir rapidement différentes mesures synthétiques de ces relations.

Cette étude est consacrée à la présentation de deux applications classiques des modèles entrées-sorties, à savoir les multiplicateurs et les mesures de linkage. Elle poursuit un double objectif. Le premier est de revenir sur les fondements mêmes de l'analyse entrées-sorties, que sont les modèles entrées-sorties. Il s'agit d'expliciter les hypothèses sous-jacentes sur lesquelles reposent les différents modèles et les limites qu'elles engendrent, et d'insister sur l'importance du choix du modèle. Le second objectif poursuivi est de montrer que l'analyse entrées-sorties développée à la fin des années 30 par Leontief évolue constamment. Les mesures de linkage en particulier, ont connu des développements intéressants au cours des quinze dernières années.

Différents modèles entrées-sorties peuvent être dérivés du tableau entrées-sorties domestique. Ils se répartissent en deux catégories : d'une part, les modèles en quantité déterminés par la demande (demand-pull models), tels que le modèle traditionnel (ouvert) de Leontief et le modèle fermé par rapport à la consommation des ménages, et d'autre part, les modèles déterminés par les coûts (cost-push models), tels que le modèle de prix de Leontief et le modèle de Ghosh réinterprété comme un modèle de prix. Enfin, le modèle entrées-sorties mixte représente une extension du modèle traditionnel et permet de spécifier dans un même modèle, une production exogène pour une partie des produits et une demande finale exogène pour le restant des produits.

Largement utilisés dans les analyses d'impact économique, les multiplicateurs dérivés des modèles entrées-sorties représentent des mesures synthétiques de la réponse d'une économie à un choc exogène. Ils permettent, par exemple, d'estimer les effets d'une variation des exportations ou de l'existence de quotas, sur la production, la consommation énergétique ou les émissions polluantes des différentes branches de l'économie. Différents multiplicateurs existent dans la littérature, selon le modèle entrées-sorties dont ils découlent et selon qu'ils représentent une mesure absolue ou relative.

Les mesures de linkage dérivées des modèles de Leontief et de Ghosh, permettent de déterminer quelles sont les branches d'activité « clés » pour une économie, en comparant l'intensité des liens en amont et en aval que les différentes branches entretiennent entre elles. La littérature propose différentes mesures de linkage, basées sur les éléments des matrices inverses de Leontief et de Ghosh et sur la méthode d'extraction hypothétique (Hypothetical Extraction Method).

L'estimation récente par le Bureau fédéral du Plan d'une série cohérente de tableaux entrées-sorties à prix courants et à prix constants pour la Belgique pour les années 1995, 2000 et 2005, va permettre de calculer toutes ces mesures de multiplicateurs et de linkage, sur une longue période et sans rupture méthodologique. Il sera également possible pour la première fois, d'analyser l'évolution sur une période de 10 ans, des multiplicateurs résultant d'une variation de la demande finale en volume.

Synthese

Sinds 1994 is het Federaal Planbureau verantwoordelijk voor de raming van de vijfjaarlijkse input-outputtabellen voor België. Die tabellen zijn een uniek instrument om de relaties tussen de verschillende (homogene) bedrijfstakken binnen de Belgische economie te analyseren. Wanneer die tabellen geïntegreerd worden in een input-outputmodel, geven ze snel verschillende synthetische maatstaven van die relaties.

In deze paper worden twee klassieke toepassingen van de input-outputmodellen voorgesteld, namelijk de multiplicatoren en de linkagemaatstaven. Het doel van de paper is tweevoudig. Allereerst komen we terug op de fundamenten zelf van de input-outputanalyse: de input-outputmodellen. Het gaat erom de onderliggende hypothesen waarop de verschillende modellen steunen en hun beperkingen te verduidelijken, en het belang van de keuze van het model te onderstrepen. Het tweede doel bestaat erin aan te tonen dat de input-outputanalyse die eind de jaren 30 door Wassily Leontief werd ontwikkeld, constant evolueert. Vooral de linkagemaatstaven hebben de voorbije vijftien jaar een interessante evolutie ondergaan.

Er kunnen verschillende input-outputmodellen worden afgeleid van de binnenlandse input-outputtabel. Ze worden opgedeeld in twee categorieën: enerzijds de vraaggestuurde kwantiteitsmodellen (demand-pull models), zoals het traditionele (open) model van Leontief en het gesloten model met inbegrip van het gezinsverbruik, en anderzijds, de kostengestuurde modellen (cost-push models), zoals het prijsmodel van Leontief en het model van Ghosh opgevat als een prijsmodel. Het gemengde input-outputmodel, tot slot, is een uitbreiding van het traditionele model. Op basis van dit model kan in eenzelfde model een exogene productie worden gespecificeerd voor een deel van de producten en een exogene finale vraag voor de rest van de producten.

Multiplicatoren afgeleid van input-outputmodellen worden vaak toegepast in economische impactanalyses en zijn synthetische maatstaven die de reactie van een economie op een exogene schok weergeven. Zo kunnen ze, bijvoorbeeld, gebruikt worden om de effecten te ramen van een verandering van de uitvoer of van het bestaan van quota, op de productie, het energieverbruik of de vervuilende emissies van de verschillende bedrijfstakken. In de literatuur treffen we verschillende multiplicatoren aan, volgens het input-outputmodel waarop ze gebaseerd zijn en naargelang ze een absolute of relatieve maatstaf zijn.

Met de linkagemaatstaven afgeleid uit de modellen van Leontief en Ghosh kunnen de sleutelsectoren van een economie worden bepaald door de intensiteit van de voorwaartse en achterwaartse relaties tussen de verschillende bedrijfstakken onderling te vergelijken. In de literatuur worden verschillende linkagemaatstaven voorgesteld, gebaseerd op de elementen van de Leontief-inverse en de Ghosh-inverse en op de hypothetische extractiemethode (Hypothetical Extraction method).

De recente raming door het Federaal Planbureau van een coherente reeks van input-outputtabellen voor België tegen lopende en constante prijzen voor de jaren 1995, 2000 en 2005, zal het mogelijk maken alle multiplicator- en linkagemaatstaven, over een lange periode en zonder methodologische breuk, te berekenen. Voor het eerst zal het ook mogelijk zijn de evolutie over een periode van 10 jaar te analyseren van de multiplicatoren die voortvloeien uit een verandering van de finale vraag in volume.

1. Introduction

Depuis la réforme de l'appareil statistique belge en 1994, le Bureau fédéral du Plan a dans ses attributions l'estimation des tableaux entrées-sorties pour la Belgique. Les tableaux entrées-sorties représentent un outil unique d'analyse des relations qui existent entre les différentes branches d'activité au sein d'une économie. Associés aux modèles macro-économiques, ils permettent d'y introduire des éléments structurels. Intégrés dans un modèle entrées-sorties, ils fournissent rapidement différentes mesures synthétiques d'analyse. Ce papier est consacré à la présentation de deux applications classiques des modèles entrées-sorties, à savoir les multiplicateurs et les mesures de linkage.

Ce papier poursuit un double objectif. Le premier est de revenir sur les fondements mêmes de l'analyse entrées-sorties : les modèles entrées-sorties. Les multiplicateurs et les mesures de linkage sont le résultat de l'application de modèles économiques spécifiques, reposant sur des hypothèses particulières. Faire le choix de l'une ou l'autre de ces mesures signifie donc adhérer à un modèle et accepter les hypothèses à la base de celui-ci. Le second objectif poursuivi est de montrer que l'analyse entrées-sorties développée à la fin des années 30 par Wassily Leontief est en constante évolution. Les mesures de linkage en particulier, ont connu des développements intéressants au cours des quinze dernières années.

Ce papier comprend quatre parties. La première partie reprend une brève présentation des tableaux entrées-sorties et rappelle les identités fondamentales qui lient les différentes parties des tableaux entrées-sorties domestiques.

La deuxième partie est consacrée à la description détaillée de cinq modèles analytiques basés sur les tableaux entrées-sorties : le modèle entrées-sorties traditionnel de Leontief, le modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages, le modèle entrées-sorties mixte, qui constitue une extension du modèle traditionnel, et enfin, les modèles entrées-sorties de prix de Leontief et de Ghosh. Cette présentation offre l'occasion de rappeler les hypothèses qui se trouvent à la base de ces différents modèles et les limites qu'elles engendrent.

La troisième partie introduit les multiplicateurs dérivés des modèles entrées-sorties déterminés par la demande et des modèles entrées-sorties mixtes. Largement utilisés dans les analyses d'impact économique, les multiplicateurs représentent des mesures synthétiques de l'effet de chocs exogènes sur différentes variables économiques. Ils peuvent ainsi être utilisés pour estimer les effets d'une variation des dépenses publiques ou de l'existence de quotas, sur la production, la consommation énergétique ou l'emploi des différentes branches de l'économie. La prudence est toutefois de mise quant à une utilisation automatique des multiplicateurs. Chaque cas doit être analysé individuellement, afin de choisir le modèle entrées-sorties le plus approprié pour appréhender correctement la situation.

La dernière partie est dédiée aux mesures de linkage dérivées des modèles entrées-sorties. L'importance économique d'une branche d'activité est déterminée en mesurant l'intensité des liens en amont et en aval qu'elle entretient avec les autres branches. En les comparant, on peut identifier les branches d'activité « clés » pour une économie, soit les branches qui, par leurs réseaux de connections, ont le plus grand potentiel de diffusion des chocs économiques au sein de l'économie. Les différentes mesures de linkage qui sont proposées dans la littérature reposent sur deux méthodes, qui trouvent leurs racines dans les modèles entrées-sorties de Leontief et de Ghosh. Elles ont été largement utilisées comme outil de planification en économie du développement et en économie régionale.

2. Le tableau entrées-sorties

Le Système Européen des Comptes (SEC 1995) définit un tableau entrées-sorties comme 'une matrice produit x produit ou branche x branche décrivant dans le détail les activités de production intérieures et les opérations sur produits de l'économie nationale' (SEC, 9.09). Il se compose de trois matrices :

– la matrice des échanges intermédiaires, qui en constitue la partie centrale : elle se présente sous la forme d'un tableau carré produit x produit et contient l'ensemble des flux de produits qui sont soit transformés, soit entièrement consommés au cours du processus de production ;

– la matrice des emplois finals : elle reprend par produit, les dépenses de consommation finale des ménages, des administrations publiques et des institutions sans but lucratif au service des ménages, la formation brute de capital fixe, la variation des stocks et les exportations ;

– La matrice des inputs primaires : elle donne par produit, la décomposition de la valeur ajoutée (rémunérations des salariés, excédent net d'exploitation, impôts nets des subventions sur la production et consommation de capital fixe) plus les impôts nets des subventions sur les consommations intermédiaires.

Lorsque l'on estime l'impact total d'un choc exogène sur une économie, on est intéressé par les effets directs et indirects de celui-ci sur l'appareil de production intérieure. C'est pourquoi les modèles entrées-sorties reposent plus spécialement sur des **tableaux entrées-sorties domestiques** (intitulés aussi 'tableaux entrées-sorties pour la production intérieure'). Il s'agit de tableaux complémentaires qui décrivent la destination des biens et services *qui ont été produits dans le pays*. Le tableau 1 reprend un exemple simplifié de tableau entrées-sorties domestique.

Tableau 1 Exemple simplifié de tableau entrées-sorties pour la production intérieure
(produit x produit)

		Produits 1 2 … n	Σ	Emplois finals	**Total**
Produits	1 2 n	Consommation intermédiaire issue de la production intérieure (n x n)	Total (n x 1)	Emplois finals issus de la production intérieure (n x 1)	**Total des emplois issus de la production intérieure = production (n x 1)**
Σ		Total (1 x n)			
Inputs primaires		Valeur ajoutée (1 x n)			
		Impôts nets des subventions sur les consommations intermédiaires (1 x n)			
Importations		Importations intermédiaires (1 x n)			
Total		**Production (1 x n)**			

Pour chaque produit, les identités suivantes se vérifient :

- Production = Consommation intermédiaire issue de la production intérieure + emplois finals issus de la production intérieure = Total des emplois issus de la production intérieure (lecture en ligne) ;
- Production = Consommation intermédiaire issue de la production intérieure + inputs primaires + importations intermédiaires = Total des coûts de production (lecture en colonne).

Les tableaux entrées-sorties de la Belgique calculés par le Bureau fédéral du Plan sont des tableaux produit x produit. C'est donc tout naturellement que les modèles exposés ici reposent sur des tableaux produit x produit et que les multiplicateurs qui en découlent doivent être interprétés en termes de produits. Dans la suite, lorsque le terme 'branche d'activité' est utilisé, il se réfère à une *branche d'activité homogène*, c'est-à-dire une branche d'activité qui ne produit qu'un seul produit ou groupe de produits.

3. Présentation des différents modèles

3.1. Les modèles entrées-sorties déterminés par la demande finale

Le modèle entrées-sorties classique de Leontief et le modèle entrées-sorties fermé sont qualifiés de **modèles de demande** (demand-driven ou demand-pull models). Ils reposent sur l'hypothèse qu'il n'existe pas de contraintes de production dans l'économie de sorte que c'est la demande finale adressée à l'appareil de production intérieure qui détermine le vecteur de production.

Ces modèles sont des **modèles en quantité**s. Dans les analyses d'impact, les prix sont fixés et ce sont les *quantités* produites qui varient suite à une variation de la demande finale en *volume*.

3.1.1. Le modèle entrées-sorties classique de Leontief

Le modèle entrées-sorties classique de Leontief (1936) est un système de n équations linéaires à n inconnues, n représentant le nombre de produits du tableau entrées-sorties pour la production intérieure. Chaque équation donne l'équilibre entre la production intérieure d'un produit i (x_i) et la demande intermédiaire et finale adressée à cette production[1] ($\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^{d}$ et $\bar{y}_i{}^{d}$, respectivement)[2].

$$\begin{aligned}
&x_1 = z_{11}^d + z_{12}^d + \cdots + z_{1n}^d + \bar{y}_1^d\\
&\vdots\\
&x_i = z_{i1}^d + z_{i2}^d + \cdots + z_{in}^d + \bar{y}_i^d\\
&\vdots\\
&x_n = z_{n1}^d + z_{n2}^d + \cdots + z_{nn}^d + \bar{y}_n^d
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\mathrm{x} = \mathrm{Z^d\, i} + \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$$

avec $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, le vecteur de production intérieure, $\mathrm{Z^d} = \begin{bmatrix} z_{11}^d & \cdots & z_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1}^d & \cdots & z_{nn}^d \end{bmatrix}$, la matrice des consommations intermédiaires issues de la production intérieure, $\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ de dimension (n x 1), le vecteur de sommation et $\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_n^d \end{bmatrix}$, le vecteur de la demande finale qui est satisfaite par la production intérieure.

Le modèle classique de Leontief repose sur l'hypothèse que la demande intermédiaire d'une branche dépend entièrement, et selon des proportions fixes, de son niveau de production. Cette relation fixe entre la production d'un produit et les inputs intermédiaires entrant dans son processus de production

---

[1] Soit une lecture en ligne du tableau entrées-sorties pour la production intérieure.

[2] Les matrices sont représentées par des majuscules, les vecteurs le sont par des minuscules et les scalaires par des minuscules en italique. Un trait au-dessus d'une variable désigne une variable exogène.

est représentée par les **coefficients techniques d'inputs**. Ceux-ci sont obtenus en divisant chaque colonne de la matrice des consommations intermédiaires par la production de la branche associée à celle-ci. Soit $a_{ij}^d = z_{ij}^d / x_j$, où a_{ij}^d indique la quantité de produit i (issue de la production intérieure) qui est utilisée pour la production d'une unité de produit j [3].

Le modèle peut dès lors se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}^d\, x_1 + a_{12}^d\, x_2 + \cdots + a_{1n}^d\, x_n + \bar{y}_1^d \\ &\vdots \\ x_i &= a_{i1}^d\, x_1 + a_{i2}^d x_2 + \cdots + a_{in}^d\, x_n + \bar{y}_i^d \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}^d\, x_1 + a_{n2}^d x_2 + \cdots + a_{nn}^d x_n + \bar{y}_n^d \end{aligned}$$

Si l'on définit la matrice des coefficients techniques domestiques, $\mathrm{A^d} = \mathrm{Z^d}\, \hat{\mathrm{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d \end{bmatrix}$, avec $\hat{\mathrm{x}}^{-1}$, la matrice inverse du vecteur x diagonalisé, le modèle peut se réécrire :

$$\mathrm{x} = \mathrm{A^d}\, \mathrm{x} + \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$$

Traditionnellement, la demande finale est considérée comme exogène au processus de production. Le modèle permet alors de déterminer le vecteur de production qui est nécessaire pour satisfaire un vecteur donné de demande finale adressée à la production intérieure :

$$\mathrm{x} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}\, \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} = \mathrm{L}\, \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$$

avec $\mathrm{L} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}$, la matrice inverse de Leontief.

La matrice inverse de Leontief part de la fin du processus de production : elle donne le lien entre la demande finale exogène adressée à la production intérieure d'une branche et la production (endogène) des différentes branches de l'économie.

L'élément l_{ij} de la matrice L représente la production intérieure du produit i qui est nécessaire directement et indirectement pour répondre à une unité de demande finale adressée à la production intérieure de produit j. Miller et Blair (2009) donnent le nom de 'multiplicateurs' aux éléments de cette matrice. La somme des éléments de la j^ème^ colonne de cette matrice indique la production qui est engendrée dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure de la branche j.

3 Le choix de cette hypothèse forte a pour conséquences que les fonctions de production de Leontief présentent des rendements d'échelle constants et qu'elles ne permettent pas de substitutions entre inputs.

3.1.2. Le modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages

Le modèle classique de Leontief est qualifié de modèle ouvert : il repose sur l'existence d'une demande finale qui est exogène au processus de production. Si l'on souhaite faire l'hypothèse qu'une partie ou que la totalité de la demande finale est endogène, il faut utiliser un modèle entrées-sorties fermé.

Le cas le plus fréquent est de fermer le modèle par rapport à la consommation des ménages. Le secteur des ménages est traité comme une branche supplémentaire (branche n+1)[4]. Le niveau des achats des ménages dépend alors du niveau de leur revenu (reçu en échange de leur travail), qui lui-même dépend du niveau de production des différents secteurs. La matrice des consommations intermédiaires est augmentée d'une ligne ($z^d_{n+1,1}$ ... $z^d_{n+1,i}$ ... $z^d_{n+1,n}$), qui représente les revenus perçus par les ménages dans les différentes branches d'activité en échange de leur travail, et d'une colonne ($z^d_{1,n+1}$ ... $z^d_{i,n+1}$ ... $z^d_{n,n+1}$), qui reprend la consommation finale des ménages pour les différents produits issus de la production intérieure. L'élément $z^d_{n+1,n+1}$ indique les achats de travail de la part des ménages.

Le modèle fermé par rapport aux ménages s'écrit de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z^d_{11} + z^d_{12} + \cdots + z^d_{1n} + z^d_{1,n+1} + \bar{y}^{d*}_1 \\
&\vdots \\
x_i &= z^d_{i1} + z^d_{i2} + \cdots + z^d_{in} + z^d_{i,n+1} + \bar{y}^{d*}_i \\
&\vdots \\
x_n &= z^d_{n1} + z^d_{n2} + \cdots + z^d_{nn} + z^d_{n,n+1} + \bar{y}^{d*}_n \\
x_{n+1} &= z^d_{n+1,1} + z^d_{n+1,2} + \cdots + z^d_{n+1,n} + z^d_{n+1,n+1} + \bar{y}^{d*}_{n+1}
\end{aligned}
$$

avec $z^d_{i,n+1}$, la production intérieure du produit *i* qui est destinée à la consommation des ménages, $\bar{y}^{d*}_i$, la nouvelle demande finale exogène adressée à la production intérieure du produit i (soit la demande finale diminuée de la consommation des ménages), x_{n+1}, la production de la branche des ménages (égale à ses revenus) et $z^d_{n+1,i}$, les revenus perçus par les ménages en provenance du secteur de production *i*. L'élément $\bar{y}^{d*}_{n+1}$ reprend par exemple les rémunérations perçues par les ménages qui sont employés par le gouvernement.

Le modèle fermé reprend l'*hypothèse* de coefficients techniques fixes, en l'étendant au nouveau secteur des ménages. Ainsi, le coefficient technique $a^d_{n+1,j} = z^d_{n+1,j}/x_j$ indique la valeur de l'emploi qui est utilisé pour la production d'une unité de produit *j*. L'endogénéisation de ce secteur a aussi comme conséquence de figer le comportement de consommation des ménages : leurs coefficients de consommation sont fixes et ils sont indépendants du niveau de leur revenu ($a^d_{i,n+1} = z^d_{i,n+1}/x_{n+1}$).

[4] Il est possible de désagréger le secteur des ménages en plusieurs groupes de ménages, en fonction de leurs niveaux de revenus ou de différentes caractéristiques (par exemple, travailleurs ou chômeurs) (voir par exemple, Miyazawa (1976)).

Le modèle fermé se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}^d x_1 + a_{12}^d x_2 + \cdots + a_{1n}^d x_n + a_{1,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_1^{d*} \\
&\vdots \\
x_i &= a_{i1}^d x_1 + a_{i2}^d x_2 + \cdots + a_{in}^d x_n + a_{i,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_i^{d*} \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}^d x_1 + a_{n2}^d x_2 + \cdots + a_{nn}^d x_n + a_{n,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_n^{d*} \\
x_{n+1} &= a_{n+1,1}^d x_1 + a_{n+1,2}^d x_2 + \cdots + a_{n+1,n}^d x_n + a_{n+1,n+1}^d x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}^{d*}
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d & a_{1,n+1}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d & a_{n,n+1}^d \\ a_{n+1,1}^d & \cdots & a_{n+1,n}^d & a_{n+1,n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{d*} \\ \vdots \\ \bar{y}_n^{d*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

L'utilisation de matrices partitionnées permet de réécrire ce système d'équations en faisant apparaître les éléments du modèle classique de Leontief :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A^d} & \mathrm{h_C} \\ \mathrm{h_R} & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{A^d} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nn}^d \end{bmatrix}$ de dimension (n x n), la matrice des coefficients techniques domestiques du modèle classique, $\mathrm{h_C} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^d \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^d \end{bmatrix}$ de dimension (n x 1), le vecteur des coefficients domestiques de consommation des ménages, $\mathrm{h_R} = \begin{bmatrix} a_{n+1,1}^d & \cdots & a_{n+1,n}^d \end{bmatrix}$ de dimension (1 x n), le vecteur des coefficients d'emploi des ménages, $h = a_{n+1,n+1}^d$ et $\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{d*} \\ \vdots \\ \bar{y}_n^{d*} \end{bmatrix}$.

Ou encore

$$\breve{\mathrm{x}} = \breve{\mathrm{A}}\,\breve{\mathrm{x}} + \breve{\bar{\mathrm{y}}}$$

avec $\breve{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$, $\breve{\bar{\mathrm{y}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$ et $\breve{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A^d} & \mathrm{h_C} \\ \mathrm{h_R} & h \end{bmatrix}$

Ce modèle entrées-sorties fermé est résolu en exprimant la production et les revenus payés au secteur des ménages pour réaliser cette production, en fonction des variables exogènes, à savoir la demande finale diminuée de la consommation des ménages, adressée à la production intérieure.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} - \mathrm{A^d} & -\mathrm{h_C} \\ n\ x\ n & n\ x\ 1 \\ -\mathrm{h_R} & (1-h) \\ 1\ x\ n & 1\ x\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{\mathrm{L}}_{11} & \breve{\mathrm{L}}_{12} \\ n\ x\ n & n\ x\ 1 \\ \breve{\mathrm{L}}_{21} & \breve{\mathrm{L}}_{22} \\ 1\ x\ n & 1\ x\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}*} \\ \bar{y}_{n+1}^{d*} \end{bmatrix}$$

Ou encore

$$\breve{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} - \breve{\mathrm{A}})^{-1}\,\breve{\bar{\mathrm{y}}} = \breve{\mathrm{L}}\,\breve{\bar{\mathrm{y}}}$$

Les éléments de la matrice inverse augmentée donnent le lien existant entre la demande finale exogène (soit la demande finale diminuée de la consommation des ménages) adressée à la production intérieure d'une branche et la production (endogène) de toutes les branches et les revenus (endogènes) payés au secteur des ménages pour réaliser cette production.

3.2. Les modèles entrées-sorties mixtes

Il existe des modèles entrées-sorties, appelés « modèles entrées-sorties mixtes », qui permettent de spécifier dans un même modèle, une production exogène pour une partie des produits et une demande finale exogène pour le restant des produits. L'intérêt de ces modèles est qu'ils permettent de formuler dans un même modèle différentes hypothèses d'exogénéité/endogénéité qui sont consistantes entre elles. Si l'on souhaite par exemple estimer l'impact d'une variation de la production de plusieurs branches d'activité sur la production totale de l'économie, seule la prise en compte de ces différentes productions exogènes dans un même modèle assure que la production de chacune des branches ne pourra pas être stimulée par la production des autres branches.

Dans les modèles déterminés par la demande finale, la production ne connaît pas de contrainte et elle est déterminée par la demande finale exogène. Mais la production d'une économie peut aussi être stimulée - ou à l'inverse, contrainte - par la production d'une ou de plusieurs branches d'activité. Celle-ci entraîne une demande supplémentaire d'inputs intermédiaires auprès des fournisseurs de ces branches, qui provoque à son tour une production additionnelle des autres branches… Dans ce cas, c'est la production qui est donnée et non la demande finale.

Dans la littérature, les modèles entrées-sorties mixtes ont principalement été utilisés dans des analyses de contraintes de l'offre, dans le secteur primaire (agriculture, pêche, sylviculture, mines). Koller et Luptacik (2007) proposent de les utiliser pour analyser les impacts directs, indirects et induits de la production d'une branche sur le reste de l'économie. 'The research question of measuring the importance of a sector or industry provides enough justification to view the production of the sector as exogenous' (Koller and Luptacik (2007, p.2)). Ils ont ainsi mesuré l'importance pour l'économie autrichienne, de la production et des investissements de la branche agricole en Autriche.

Considérons une économie composée de n branches d'activité. Pour les k premières branches, la variable exogène est la demande finale (modèle ouvert). Pour les (n-k) branches restantes, c'est la production qui est exogène. Il existe plusieurs façons de modéliser une telle économie.

3.2.1. Réarranger les équations du modèle classique

Cette spécification part des égalités du modèle classique (ouvert) de Leontief (n équations à n inconnues), dont les branches ont été réordonnées afin que les k premières branches aient une demande finale exogène $[\bar{y}_1^d \quad \cdots \quad \bar{y}_k^d]$ et une production endogène $[x_1 \quad \cdots \quad x_k]$ et que les (n-k) dernières branches aient une production exogène $[\bar{x}_{k+1} \quad \cdots \quad \bar{x}_n]$ et une demande finale endogène $[y_{k+1}^d \quad \cdots \quad y_n^d]$.

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &= a_{11}^d x_1 + a_{12}^d x_2 + \cdots + a_{1k}^d x_k + a_{1,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{1n}^d \bar{x}_n + \bar{y}_1^d \\
&\vdots \\
x_k \quad &= a_{k1}^d x_1 + a_{k2}^d x_2 + \cdots + a_{kk}^d x_k + a_{k,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{kn}^d \bar{x}_n + \bar{y}_k^d \\
\bar{x}_{k+1} &= a_{k+1,1}^d x_1 + a_{k+1,2}^d x_2 + \cdots + a_{k+1,k}^d x_k + a_{k+1,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^d \bar{x}_n + y_{k+1}^d \\
&\vdots \\
\bar{x}_n \quad &= a_{n1}^d x_1 + a_{n2}^d x_2 + \cdots + a_{nk}^d x_k + a_{n,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{nn}^d \bar{x}_n + y_n^d
\end{aligned}
$$

Ces équations sont ensuite réarrangées afin que l'ensemble des variables exogènes se trouvent à droite de l'égalité et l'ensemble des variables endogènes, à gauche :

$$
\begin{aligned}
&(1 - a_{11}^d) x_1 - a_{12}^d x_2 - \cdots - a_{1k}^d x_k \;=\; \bar{y}_1^d + a_{1,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{1n}^d \bar{x}_n \\
&\vdots \\
&-a_{k1}^d x_1 - a_{k2}^d x_2 - \cdots + (1 - a_{kk}^d) x_k \;=\; \bar{y}_k^d + a_{k,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{kn}^d \bar{x}_n \\
&-a_{k+1,1}^d x_1 - a_{k+1,2}^d x_2 - \cdots - a_{k+1,k}^d x_k - y_{k+1}^d \;=\; -(1 - a_{k+1,k+1}^d) \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^d \bar{x}_n \\
&\vdots \\
&-a_{n1}^d x_1 - a_{n2}^d x_2 - \cdots - a_{nk}^d x_k - y_n^d = a_{n,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots - (1 - a_{nn}^d) \bar{x}_n
\end{aligned}
$$

Sous-forme matricielle :

$$
\begin{bmatrix}
(1 - a_{11}^d) & \cdots & -a_{1k}^d & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{k1}^d & \cdots & (1 - a_{kk}^d) & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{k+1,1}^d & \cdots & -a_{k+1,k}^d & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{n1}^d & \cdots & -a_{nk}^d & 0 & \cdots & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_{k+1}^d \\ \vdots \\ y_n^d \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\
0 & \cdots & 0 & -(1 - a_{k+1,k+1}^d) & \cdots & a_{k+1,n}^d \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^d & \cdots & -(1 - a_{nn}^d)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}
$$

En définissant les matrices

$$
\mathrm{M} =
\begin{bmatrix}
(1 - a_{11}^d) & \cdots & -a_{1k}^d & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{k1}^d & \cdots & (1 - a_{kk}^d) & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{k+1,1}^d & \cdots & -a_{k+1,k}^d & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{n1}^d & \cdots & -a_{nk}^d & 0 & \cdots & -1
\end{bmatrix},
\mathrm{N} =
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\
0 & \cdots & 0 & -(1 - a_{k+1,k+1}^d) & \cdots & a_{k+1,n}^d \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^d & \cdots & -(1 - a_{nn}^d)
\end{bmatrix},
$$

$\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_{k+1}^d \\ \vdots \\ y_n^d \end{bmatrix}$ et $\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$, le modèle peut se réécrire : $\mathrm{M}\,\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$

Ce système d'équations est résolu en exprimant les variables endogènes en fonction des variables exogènes :

$$
\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}
$$

Les éléments de la matrice $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$ représentent en quelque sorte des multiplicateurs, qui relient les variables endogènes aux variables exogènes.

En utilisant la matrice des coefficients techniques domestiques du modèle classique de Leontief $\mathrm{A^d}$ et en

la partitionnant : $\mathrm{A^d} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_{11}^d} & \mathrm{A_{12}^d} \\ k\ x\ k & k\ x\ (n-k) \\ \mathrm{A_{21}^d} & \mathrm{A_{22}^d} \\ (n-k)\ x\ k & (n-k)\ x\ (n-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1k}^d & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^d & \cdots & a_{kk}^d & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\ a_{k+1,1}^d & \cdots & a_{k+1,k}^d & a_{k+1,k+1}^d & \cdots & a_{k+1,n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^d & \cdots & a_{nk}^d & a_{n,k+1}^d & \cdots & a_{nn}^d \end{bmatrix}$,

on peut réécrire les matrices M et N :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A_{11}^d}) & 0 \\ -\mathrm{A_{21}^d} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{A_{12}^d} \\ 0 & -(\mathrm{I}-\mathrm{A_{22}^d}) \end{bmatrix}$$

On peut alors calculer la matrice inverse de M, en utilisant les propriétés de l'inverse des matrices partitionnées, soit $\mathrm{M^{-1}} = \begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A_{11}^d})^{-1} & 0 \\ -\mathrm{A_{21}^d}(\mathrm{I}-\mathrm{A_{11}^d})^{-1} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$

Le système d'équations $\mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} = \mathrm{M^{-1}N}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$, peut alors se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{I}-\mathrm{A_{11}^d}) & 0 \\ -\mathrm{A_{21}^d} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{A_{12}^d} \\ 0 & -(\mathrm{I}-\mathrm{A_{22}^d}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} \text{, avec } \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \mathrm{x}_{\mathrm{Mixed}} \text{ et } \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$$

Il a comme **solution** :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y^d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k\mathrm{A_{12}^d} \\ k\ x\ k & k\ x\ (n-k) \\ -\mathrm{A_{21}^d}\mathrm{L}^k & (\mathrm{I}-\mathrm{A_{22}^d}) - \mathrm{A_{21}^d}\mathrm{L}^k\mathrm{A_{12}^d} \\ (n-k)x\ k & (n-k)\ x\ (n-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix} \text{, avec } \mathrm{L}^k = (\mathrm{I}-\mathrm{A_{11}^d})^{-1}$$

La résolution de ce modèle repose sur le calcul d'une matrice inverse réduite de dimension (k x k). Dans la partie supérieure droite, la matrice ($\mathrm{L}^k\mathrm{A_{12}^d}$) exprime le lien existant entre la production exogène et la production endogène.

- La **production endogène** est égale à $\mathrm{x} = \mathrm{L}^k\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \mathrm{L}^k\,\mathrm{A_{12}^d}\,\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{L}^k\,(\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \mathrm{A_{12}^d}\bar{\mathrm{x}})$. Pour une production exogène fixée ($\bar{\mathrm{x}}$), le vecteur $\mathrm{A_{12}^d}\bar{\mathrm{x}}$ forme en quelque sorte une demande exogène additionnelle adressée à la production des branches 1 à k.
- La **demande finale endogène** est égale à $\mathrm{y^d} = -\mathrm{A_{21}^d}\,\mathrm{L}^k\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} + \left((\mathrm{I}-\mathrm{A_{22}^d}) - \mathrm{A_{21}^d}\mathrm{L}^k\mathrm{A_{12}^d}\right)\bar{\mathrm{x}} = (\mathrm{I}-\mathrm{A_{22}^d})\,\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{A_{21}^d}\mathrm{x}$.

Cas particuliers

1. Si l'on fait l'hypothèse extrême qu'il n'y a pas de production exogène ($\bar{x} = 0$), le modèle entrées-sorties mixte se réduit en un modèle entrées-sorties classique de demande ($L^k = L$, et y^d, A_{12}^d, A_{21}^d et A_{22}^d n'existent pas).

2. Si l'on raisonne plutôt en termes de variations avec l'hypothèse que seule la production exogène varie ($\Delta\bar{y}^d = 0$, pour les produits 1 à k et $\Delta\bar{x} \neq 0$, pour les produits k+1 à n), alors :
   – La variation de la production endogène (des k premiers produits) est égale à :

$$\Delta x = L^k A_{12}^d \Delta\bar{x}$$

   $A_{12}^d \Delta\,\bar{x}$ convertit la production exogène supplémentaire des produits k+1 à n, en une demande supplémentaire d'inputs intermédiaires adressée aux branches 1 à k et la matrice inverse du modèle réduit aux k premiers produits (L^k) convertit cette demande en une production totale; $L^k A_{12}^d \Delta\,\bar{x}$ représente la production endogène totale de produits 1 à k qui est nécessaire directement et indirectement pour satisfaire la production supplémentaire exogène de produits des branches k+1 à n.

   – La variation de la demande finale endogène des produits k+1 à n est égale à :

$$\Delta y^d = \left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x} - A_{21}^d L^k A_{12}^d\,\Delta\bar{x} = \left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x} - A_{21}^d \Delta x$$

   $\left(I - A_{22}^d\right)\Delta\bar{x}$ représente la production supplémentaire de produits k+1 à n, qui est disponible pour la demande finale, après déduction des livraisons intermédiaires aux branches k+1 à n ; $A_{21}^d L^k A_{12}^d \Delta\bar{x}$ équivaut à la demande intermédiaire supplémentaire adressée aux branches k+1 à n de la part des branches 1 à k, pour répondre à l'augmentation de leur production (Δx). Etant donné que la variation de la production des branches k+1 à n est fixée, cette demande supplémentaire doit être soustraite de ce qui autrement aurait été disponible pour la demande finale. Pour une variation donnée de la production exogène et de la demande finale exogène ($\Delta\bar{x}$ et $\Delta\bar{y}^d$), il est parfaitement possible que le modèle ne puisse être résolu qu'au prix d'une diminution de la demande finale endogène.

3.2.2. Extraire les branches dont la production est exogène

Koller et Luptacik (2007) proposent une formulation alternative du modèle mixte, qu'ils intitulent « the one-sided mixed variables model ». Comme son nom l'indique, ce modèle n'a qu'un seul vecteur mixte, en l'occurrence celui de droite. Ils l'obtiennent en modifiant la matrice A^d des coefficients techniques domestiques, en remplaçant par des zéros les lignes des coefficients appartenant aux branches dont la production est exogène (dernières (n-k) lignes). Cette modification de la matrice des coefficients techniques domestiques garantit que la production (exogène) des branches k+1 à n ne sera pas stimulée par les autres branches.

Soit

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}^d x_1 + \cdots + a_{1k}^d x_k + a_{1,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{1n}^d \bar{x}_n + \bar{y}_1^d \\
&\vdots \\
x_k &= a_{k1}^d x_1 + \cdots + a_{kk}^d x_k + a_{k,k+1}^d \bar{x}_{k+1} + \cdots + a_{kn}^d \bar{x}_n + \bar{y}_k^d \\
x_{k+1} &= \bar{x}_{k+1} \\
&\vdots \\
x_n &= \bar{x}_n
\end{aligned}$$

Sous-forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1k}^d & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^d & \cdots & a_{kk}^d & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

En définissant les matrices

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{x} \end{bmatrix},\ \tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & \cdots & a_{1k}^d & a_{1,k+1}^d & \cdots & a_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^d & \cdots & a_{kk}^d & a_{k,k+1}^d & \cdots & a_{kn}^d \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}^{\mathrm{d}} & \mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ (k\ x\ k) & k\ x\ (n-k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^d \\ \vdots \\ \bar{y}_k^d \\ \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix}$$

Le modèle peut se réécrire $\mathrm{x} = \tilde{\mathrm{A}}\,\mathrm{x} + \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$

La résolution du modèle procède en deux temps.

– Dans un premier temps, le vecteur des productions est déterminé en fonction des variables exogènes.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k\,\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} \\ \bar{\mathrm{x}} \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathrm{x} = \left(\mathrm{I} - \tilde{\mathrm{A}}\right)^{-1} \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}} = \tilde{\mathrm{L}}^n\, \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{Mixed}}$$

avec $\tilde{\mathrm{L}}^n = \left(\mathrm{I} - \tilde{\mathrm{A}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^k & \mathrm{L}^k\,\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$, de dimension (n x n).

– Dans un second temps, la demande finale endogène $[y_{k+1} \quad \cdots \quad y_n]$ est obtenue en injectant la solution du modèle mixte dans le système d'équations : $\mathrm{y} = (\mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{d}})\,\mathrm{x}$.

Les deux formulations alternatives qui ont été présentées aux points 3.2.1 et 3.2.2 ci-dessus donnent les mêmes résultats et sont valables quel que soit le nombre de productions exogènes.

3.3. Les modèles entrées-sorties déterminés par les coûts

Le modèle entrées-sorties de prix de Leontief et le modèle entrées-sorties de prix de Ghosh sont qualifiés de **modèles de coûts** (cost-push models). Dans ces modèles, ce n'est plus la demande finale mais bien les inputs primaires augmentés des importations intermédiaires qui sont les variables exogènes et qui déterminent la production.

Ces modèles sont des **modèles de prix**. Dans les analyses d'impact, toutes les quantités sont fixées et ce sont les *prix* de la production qui varient suite à une variation des *prix* des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires.

3.3.1. Le modèle entrées-sorties de prix de Leontief

Le modèle entrées-sorties de prix de Leontief repose sur une lecture en colonne du tableau entrées-sorties pour la production intérieure. Chaque équation de ce modèle donne l'équilibre entre la valeur de la production intérieure d'un produit i et la valeur des inputs intermédiaires et primaires qui entrent dans cette production.

$$x' = i'Z^d + \tilde{v}'$$

avec x' le vecteur de production (dimension (1 x n)), Z^d la matrice des consommations intermédiaires domestiques (dimension (n x n)), i' le vecteur de sommation (dimension (1 x n)) et $\tilde{v}'$ le vecteur des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires (dimension (1 x n)).

L'introduction de l'hypothèse de Leontief de coefficients techniques d'inputs fixes permet de substituer Z^d par $A^d\,\hat{x}$ et de réécrire le modèle :

$$x' = i'A^d\,\hat{x} + \tilde{v}'$$

En post-multipliant cette égalité par $\hat{x}^{-1}$, on obtient le prix de chaque produit par euro de production. Il est égal à la somme des coûts intermédiaires et primaires pour produire 1 euro de production. Pour l'année de base, il est égal à 1.

$$i' = i'A^d + \tilde{v}_c'$$

avec $\tilde{v}_c' = \tilde{v}'\hat{x}^{-1}$, le vecteur des coefficients d'inputs primaires augmentés des importations intermédiaires, par euro de production.

Si l'on indique par $(p^0)'$, le vecteur des indices de prix de l'année de base, le modèle entrées-sorties de prix de Leontief devient : $(p^0)' = (p^0)'A^d + (\tilde{v}_c^0)'$

Ce modèle est résolu en exprimant les indices de prix de la production en fonction des coûts des inputs primaires par unité de production :

$$(p^0)' = (\tilde{v}_c^0)' \left(I - A^d\right)^{-1} = (\tilde{v}_c^0)' \, L^0$$

A l'année de base, $(p^0)' = (\tilde{v}_c^0)' \, L^0 = i'$.

Le modèle de prix de Leontief est généralement utilisé pour mesurer l'impact relatif sur les prix d'une économie, d'une variation des coûts des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires.

Soit $(\tilde{v}^1)' = (\tilde{v}^0)' + (\Delta\tilde{v})'$, le vecteur des nouveaux coûts des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires. La résolution du modèle de prix de Leontief permet d'estimer le nouvel indice de prix de la production (p^1) qui correspond à ce nouveau vecteur :

$$(p^1)' = (\tilde{v}_c^1)' \, L^0 \quad \text{avec } (\tilde{v}_c^1)' = (\tilde{v}^1)' \, (\hat{x}^0)^{-1}$$

Puisque $(p^0)' = i'$, $(p^1)'$ indique la variation des prix relatifs consécutive à une variation relative des coûts des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires $(\tilde{v}^1/\tilde{v}^0)$.

Le **modèle entrées-sorties de prix de Leontief** est qualifié de modèle 'dual' du **modèle entrées-sorties de quantité de Leontief**. Ce terme est utilisé pour signifier que l'un des modèles permet de déterminer des prix (les quantités étant fixées) alors que l'autre modèle sert à déterminer des quantités (les prix étant fixés), tout en ayant en commun l'hypothèse de Leontief de fixité des coefficients d'inputs.

3.3.2. Le modèle entrées-sorties de Ghosh

Le modèle entrées-sorties de Ghosh (1958) repose sur le même ensemble d'équations comptables que le modèle de prix de Leontief (soit, une lecture en colonne du tableau entrées-sorties pour la production intérieure, en valeur).

$$x' = i'Z^d + \tilde{v}' \qquad \text{ou} \qquad x = Z^{d\prime}\, i + \tilde{v}$$

avec x' le vecteur de production (dimension (1 x n)), Z^d la matrice des consommations intermédiaires domestiques (dimension (n x n)), i' le vecteur de sommation (dimension (1 x n)) et $\tilde{v}'$ le vecteur des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires (dimension (1 x n)).

Ce qui caractérise le modèle de Ghosh par rapport au modèle de Leontief, c'est qu'il repose sur l'hypothèse qu'il existe une relation fixe entre la production d'un produit et l'utilisation de ce produit par les différentes branches d'activité dans leur processus de production. Cette relation est représentée par les **coefficients d'output** ou **coefficients d'allocation**[5]. Ils sont obtenus en divisant chaque ligne de la matrice des livraisons intermédiaires domestiques par la production du produit qui est associée à cette ligne. Soit $b_{ij}^d = z_{ij}^d / x_i$, où b_{ij}^d représente la part de la production du produit i qui est livrée pour

5 Ghosh situe son modèle dans le cadre d'une économie planifiée dont la production est contrainte par des ressources limitées. 'In economies of rationing since every sector registers a high demand for the scarce factors the general tendency of the rationing authorities is not to change the relative shares of each sector in the short run since such relative shares are determined by a delicate balancing of different sectors' claims and counter-claims. This tendency considered from the problem of projection makes the allocation coefficient more stable in the short run than production coefficients', Ghosh (1958, p.60).

entrer dans le processus de production du produit j et $B^d = \hat{x}^{-1}Z^d$, la matrice des coefficients d'allocation[6].

Le modèle peut dès lors se réécrire de la façon suivante :

$$x' = x'B^d + \tilde{v}' \quad \text{ou} \quad x = B^{d\prime}\, x + \tilde{v}$$

Le modèle permet alors de déterminer le vecteur de production qui est nécessaire pour satisfaire un vecteur donné d'inputs primaires augmentés des importations intermédiaires :

$$x' = \tilde{v}'(I - B^d)^{-1} = \tilde{v}'G \quad \text{ou} \quad x = (I - B^{d\prime})^{-1}\tilde{v} = G'\,\tilde{v}$$

avec $G = (I - B^d)^{-1}$, la matrice inverse de Ghosh et $G' = (I - B^{d\prime})^{-1}$.

La matrice inverse de Ghosh part du début du processus de production : elle donne le lien entre les inputs primaires (augmentés des importations intermédiaires) qui entrent dans le processus de production et la production des différentes branches de l'économie.

A l'origine, le modèle de Ghosh était présenté comme un modèle en quantités, déterminé par l'offre (supply-driven quantity model). Il permettait d'estimer l'impact d'un changement dans la disponibilité d'un input primaire dans une branche donnée sur la production de l'ensemble de l'économie. Le raisonnement était le suivant : la disponibilité d'un input primaire dans une branche particulière détermine le niveau de production de cette branche et de là, le niveau de production des branches qui utilisent ce produit comme input pour leur propre production. Dans ce contexte, *l'élément g_{ij} de la matrice G* mesurait la valeur de la production de la branche j par unité d'inputs primaires (augmentés des importations intermédiaires) de la branche i.

A partir du début des années 80, différentes réserves ont été émises à l'encontre du modèle de Ghosh : irréalisme de l'hypothèse de coefficients d'allocation fixes, non plausibilité d'un modèle dans lequel la variation des inputs primaires d'une branche entraîne une variation de la production de toutes les branches, qui ne s'accompagne pas d'une variation des inputs primaires des autres branches (Oosterhaven, 1988).

En 1997, Dietzenbacher montre que l'application du modèle de Ghosh dans des analyses d'impact donne des résultats équivalents à ceux obtenus en utilisant le modèle de prix de Leontief. C'est pourquoi il suggère que le modèle de Ghosh soit réinterprété comme un **modèle de prix**, qui indique l'impact d'une variation exogène des prix des inputs primaires sur les prix d'une économie (**cost-push input-output price model**). Dans ce cas, toutes les quantités sont fixées (aussi bien la production que les inputs intermédiaires et primaires) et la variation du prix des inputs primaires est entièrement répercutée par le producteur dans le prix de ses produits, qui sont eux-mêmes utilisés pour la production d'autres produits, dont les prix seront adaptés en fonction…

[6] $b^d_{jj} = a^d_{jj,}, \forall\, j$.

Pour illustrer cela, prenons le vecteur des productions en valeur dans la situation de départ[7]. Il est déterminé en fonction des coûts des inputs primaires et des importations intermédiaires :

$$(x^0)' = (\tilde{v}^0)'(I - B^d)^{-1} = (\tilde{v}^0)'G^0$$

Soit $(\Delta\tilde{v})$, la variation exogène des coûts des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires (provoquée par une variation des prix de ceux-ci, les quantités étant fixées). La valeur de la nouvelle production est égal à :

$$(x^1)' = (\tilde{v}^1)'G^0$$

avec $(\tilde{v}^1)' = (\tilde{v}^0)' + (\Delta\tilde{v})'$, les nouveaux coûts des inputs primaires.

Toutes les quantités étant fixées, la variation relative des prix de la production s'obtient en prenant le vecteur $(\hat{x}^0)^{-1}$ (x^1).

La différence entre le modèle entrées-sorties de prix de Leontief et le modèle de prix de Ghosh est que le premier donne directement des résultats en termes de variation relative des prix, alors que le modèle de prix de Ghosh les donne en termes de valeur de la nouvelle production, de laquelle on peut déduire la variation relative des prix comme le ratio de la nouvelle production sur la production de départ.

L'intérêt du modèle de prix de Ghosh réside dans le fait qu'il est plus simple à calculer (pas nécessaire de passer en indices, puis de repasser en valeurs) et à interpréter. Ainsi, *l'élément g_{ij} de la matrice G* mesure l'augmentation de la *valeur* de la production de la branche j, consécutive à une variation des prix, qui résultent directement et indirectement d'une augmentation unitaire du *prix* des inputs primaires augmentés des importations intermédiaires de la branche i. La somme en ligne des éléments de la matrice G mesure l'effet direct et indirect d'une augmentation unitaire du prix des inputs primaires de la branche i sur la valeur de la production de toutes les branches de l'économie.

Il a également été démontré que lorsque l'on utilise un modèle de coûts (cost-push price model), les changements de prix modifient les coefficients d'inputs ($A^1 \neq A^0$) et n'affectent pas les coefficients d'output ($B^1 = B^0$). Cela valide l'hypothèse de Ghosh de coefficients techniques d'output fixes, dans le cas d'un modèle de coûts.

Pour être complet, il faut signaler que le modèle de prix de Ghosh a un modèle dual en quantités, qui donne des résultats équivalents à ceux obtenus sur base du modèle en quantité de Leontief. Comme le modèle classique de Leontief, le modèle en quantité de Ghosh repose sur une lecture en ligne du tableau entrées-sorties pour la production intérieure (demand-pull quantity model). Il partage avec le modèle de prix de Ghosh, l'hypothèse de fixité des coefficients d'output. Les caractéristiques du **modèle de Ghosh en quantités** sont reprises dans le Tableau 2 ci-dessous.

[7] Le chiffre '0' désigne la situation de départ ; le chiffre '1', la nouvelle situation.

3.4. Les modèles de Leontief et de Ghosh : tableau récapitulatif

La présentation des modèles de Leontief et de Ghosh a montré que ces différents modèles sont liés :

– les modèles en quantités et en prix (qu'ils soient de Leontief ou de Ghosh) ont été décrits comme des modèles 'duaux' : les premiers déterminent des quantités (les prix étant fixés), alors que les seconds déterminent des prix (les quantités étant fixées), tout en partageant une même hypothèse sur la structure des relations interindustrielles (coefficients d'inputs fixes, dans le cas de Leontief, coefficients d'outputs fixes, dans le cas de Ghosh) ;

– les modèles de Leontief et de Ghosh sont qualifiés de modèles miroirs. Le modèle en quantités de Ghosh donne une image miroir du modèle en quantités de Leontief ; le modèle de prix de Leontief donne une image miroir du modèle de prix de Ghosh.

Le tableau 2 ci-dessous reprend les principales caractéristiques des modèles en quantités et de prix de Ghosh et de Leontief.

Tableau 2 Les modèles de Leontief et de Ghosh, en prix et en quantités

	Modèle en quantités de Leontief	Modèle en quantités de Ghosh	Modèle de prix de Leontief	Modèle de prix de Ghosh
Types de modèle	Demand-pull quantity model	Demand-pull quantity model	Cost-Push price model	Cost-Push price model
Hypothèses	Les prix sont fixés les quantités varient	Les prix sont fixés les quantités varient	Les quantités sont fixées les prix varient	Les quantités sont fixées les prix varient
	Coefficients d'inputs fixes	Coefficients d'output fixes	Coefficients d'inputs fixes	Coefficients d'outputs fixes
Variables exogènes	Demande finale	Demande finale par unité de production	Inputs primaires par unité de production	Inputs primaires
	$y^{d\,1}$	$y_c^{d\,1} = (\hat{x}^0)^{-1}\, y^{d\,1}$	$\tilde{v}_c^1 = (\hat{x}^0)^{-1}\, \tilde{v}^1$	$\tilde{v}^1$
Variables endogènes	Production (valeur)	Indices de quantité	Indices de prix	Production (valeur)
	$x^1 = L^0 y^{d\,1}$	$\tilde{x} = (\hat{x}^0)^{-1} x^1 = G^0\, y_c^{d\,1}$	$\tilde{p} = (\hat{x}^0)^{-1} x^1 = (L^0)'\, \tilde{v}_c^1$	$x^1 = (G^0)'\, \tilde{v}^1$
Stabilité des coefficients	$A^1 = A^0$	$B^1 \neq B^0$	$A^1 \neq A^0$	$B^1 = B^0$

4. Les multiplicateurs

Les multiplicateurs représentent une application classique des modèles entrées-sorties. Ils sont largement utilisés dans des analyses d'impact économique. Ils permettent ainsi d'estimer les effets d'une variation des dépenses publiques ou encore de l'existence de quotas, sur la production, la consommation énergétique ou les émissions polluantes des différentes branches de l'économie, ou encore sur l'emploi ou les inputs primaires générés dans ces différentes branches.

« La notion même de multiplicateurs repose sur la différence entre **l'effet initial** d'un changement exogène et les **effets totaux** de ce changement. » (Miller et Blair, 2009, p. 244). Les multiplicateurs représentent les effets totaux d'un changement exogène, rapportés aux effets initiaux de ce changement. L'estimation des effets totaux est le résultat de l'application d'un des modèles entrées-sorties présentés dans le chapitre précédant. Faire le choix d'un multiplicateur signifie donc également adhérer à un modèle et accepter les hypothèses à la base de ce modèle.

4.1. Les multiplicateurs de la demande finale

Sans surprise, les multiplicateurs de la demande finale découlent des modèles entrées-sorties déterminés par la demande finale. Dans le cadre de ces modèles, le choc exogène est une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits. Les multiplicateurs de la demande finale représentent le ratio des effets totaux d'un changement de la demande finale, rapportés aux effets initiaux de ce changement.

Prenons l'exemple d'une variation d'un euro de la demande finale adressée à la production intérieure du produit j. L'**effet total** de cette variation sur la production de l'ensemble de l'économie se décompose en plusieurs effets :

– Un **effet initial** qui se situe toujours au niveau de la branche qui reçoit le stimulus. Il se réfère au choc exogène : la branche j va augmenter sa production d'un euro pour répondre à la demande finale supplémentaire ;

– Un **effet direct** (= first-round effect) : pour assurer cette production supplémentaire, la branche j va devoir faire appel à ses fournisseurs directs. Cet effet direct est égale à $\sum_i a_{ij}$;

– Un **effet indirect** (= second and subsequent round effects) : ses fournisseurs vont à leur tour adresser une demande supplémentaire d'inputs à leurs fournisseurs, qui eux-mêmes vont contacter leurs fournisseurs …[8] L'effet indirect est égal à $\sum_i l_{ij} - \sum_i a_{ij} - 1$ [9].

– Un **effet induit par la consommation des ménages** (dans le cas d'un modèle fermé). Pour assurer ces productions supplémentaires, les différentes branches font appel à la branche des ménages (en tant que travailleurs). L'augmentation des revenus des ménages entraîne automatiquement une augmentation de leurs achats, qui est satisfaite par un accroissement additionnel de la production…

---

[8] West et Jensen (1980) lui donne le nom de 'Industrial Support Effect'.

[9] Pour rappel, a_{ij} est un coefficient technique d'inputs et l_{ij} est un élément de la matrice inverse de Leontief (cfr. point 3.1.1).

Si l'on est plutôt intéressé par les effets de cette variation sur l'emploi, l'effet initial est égal à la variation de l'emploi au sein de la branche j qui est directement associée à la variation de la production de la branche j, soit le coefficient d'emploi de la branche j ($e_{cj} = e_j/x_j$). L'effet direct est égal à $\sum_i e_{ci}a_{ij}$ et l'effet indirect est lui égal à $\sum_i e_{ci}l_{ij} - \sum_i e_{ci}a_{ij} - e_{cj}$.

Dans le contexte d'un modèle entrées-sorties **ouvert**, l'effet total est limité aux trois premiers effets[10]. Lorsque l'on **ferme le modèle** par rapport à la consommation des ménages, l'effet total incorpore également l'effet induit par la consommation des ménages.

Les multiplicateurs représentent en quelque sorte une mesure de la réponse d'une économie à un choc exogène. Différentes mesures existent dans la littérature : certaines sont absolues, d'autres sont relatives. Les mesures **absolues** sont exprimées par rapport au choc exogène, c'est-à-dire par unité de demande finale adressée à la production intérieure. Les mesures **relatives** rapportent l'effet total de la variation de la demande finale à l'effet initial de cette variation (par exemple, la variation totale de l'emploi sur la variation initiale de l'emploi, dans le cas d'un multiplicateur relatif de l'emploi).

Dans la littérature, les multiplicateurs de la demande finale sont couramment ventilés en quatre catégories, selon que le modèle dont ils dérivent soit ouvert ou fermé et selon que la mesure de l'effet total de la variation de la demande finale soit absolue ou relative.

- La catégorie des « **multiplicateurs simples** » reprend les multiplicateurs absolus qui sont estimés sur base d'un modèle ouvert ;
- La catégorie des « **multiplicateurs totaux** » regroupe les multiplicateurs absolus dont les effets totaux comprennent également des effets induits par la consommation des ménages (modèle fermé) ;
- La catégorie des « **multiplicateurs de Type I** » rassemble les multiplicateurs relatifs dont les effets totaux sont estimés dans le cadre d'un modèle ouvert ;
- La catégorie des « **multiplicateurs de Type II** » regroupe les multiplicateurs relatifs dont les effets totaux comprennent des effets induits (modèles fermés).

Tableau 3 Les multiplicateurs de la demande finale

Multiplicateurs de la demande finale		Modèles	
		Ouverts (Effets directs et indirects)	Fermés (Effets directs, indirects et induits)
Mesures	Absolues	Multiplicateurs Simples	Multiplicateurs Totaux
	Relatives	Multiplicateurs de Type I	Multiplicateurs de Type II

La présentation des multiplicateurs de la demande finale se limite ici aux multiplicateurs de production, d'emploi et de revenu qui découlent du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief et du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages. Le lecteur intéressé pourra facilement déduire d'autres multiplicateurs de la demande finale, tels que les multiplicateurs de la consommation énergétique ou les multiplicateurs de facteurs de pollution.

[10] De façon plus générale, le concept de multiplicateur peut s'expliquer sur base du raisonnement itératif suivant : la variation de la demande finale Δy, engendre un effet initial sur la production qui est égal à $\Delta x^0 = \Delta y$, qui engendre à sont tour un effet direct sur la production $\Delta x^1 = A^d \, \Delta x^0 = A \, \Delta y$, suivi d'un premier effet indirect au tour suivant $\Delta x^2 = A^d \, \Delta x^1 = (A^d)^2 \Delta y$, qui va lui même produire un effet indirect supplémentaire au tour suivant… A l'infini, l'effet total est alors égal à $\Delta x = \left(I + A^d + (A^d)^2 + (A^d)^3 + \ \ldots\right) \Delta y = (I - A^d)^{-1} \Delta y$.

4.1.1. Les multiplicateurs de production de la demande finale

Les multiplicateurs de production de la demande finale mesurent l'impact d'une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits, sur la production totale de l'économie.

Dans le cas des multiplicateurs de production de la demande finale, l'effet initial sur la production de la variation d'un euro de la demande finale adressée à la production intérieure d'un produit est égal à la variation de la demande finale elle-même (soit au choc exogène). C'est pourquoi les mesures absolues et relatives sont identiques dans ce cas.

a. Les multiplicateurs de production simples

	Multiplicateurs de production
Multiplicateur simple	Les multiplicateurs de production simples découlent du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief (à n produits). $$\Delta x = (I - A^d)^{-1}\, \Delta\bar{y}^d = L\, \Delta\bar{y}^d$$ L'**effet initial** d'une variation de la demande finale adressée à la production intérieure représente la production qui est immédiatement nécessaire à la satisfaction de cette demande finale additionnelle, soit la variation de la demande finale elle-même, $i'\Delta\bar{y}^d$. L'**effet total** correspond à la production intérieure totale que cette demande finale additionnelle engendre directement et indirectement dans l'ensemble de l'économie, via les approvisionnements intermédiaires, soit $i'L\,\Delta\bar{y}^d$. Il se décompose en un effet initial ($i'\Delta\bar{y}^d$), un effet direct ($i'A^d\,\Delta\bar{y}^d$) et un effet indirect ($i'L\,\Delta\bar{y}^d - i'\Delta\bar{y}^d - i'A^d\,\Delta\bar{y}^d$). Le **multiplicateur de production simple** de la demande finale est égal à $\frac{i'\,L\,\Delta\bar{y}^d}{i'\,\Delta\bar{y}^d}$
	Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, **le multiplicateur de production simple** est égal à la somme des éléments de la $j^{ème}$ colonne de la matrice inverse de Leontief $$m\,(output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}$$ Le multiplicateur de production du produit j indique la production qui est engendrée dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure de produit j.

b. Les multiplicateurs de production totaux

<table>
<tr><td></td><td>Multiplicateurs de production</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplicateurs totaux</td><td>
Les multiplicateurs de production totaux découlent du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages (n+1 produits).

$$\Delta\breve{\mathrm{x}} = (\mathrm{I} - \breve{\mathrm{A}})^{-1}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}} = \breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$$

avec $\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$, la demande finale diminuée de la consommation des ménages.

L'effet initial d'une variation de la demande finale adressée à la production intérieure représente la production qui est immédiatement nécessaire à la satisfaction de cette demande finale additionnelle, soit la variation de la demande finale elle-même, $\mathrm{i}'\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$.

L'effet total est égal à $\mathrm{i}'\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}$. Il comprend l'effet initial, les effets qui se manifestent via les approvisionnements intermédiaires (effet direct + effet indirect) et les effets induits additionnels qui se manifestent via la hausse des revenus des ménages en échange de leur travail et l'augmentation qui s'ensuit de leurs dépenses de consommation finale.

Le multiplicateur de production total de la demande finale est égal à $\frac{\mathrm{i}'\breve{\mathrm{L}}\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}{\mathrm{i}'\,\Delta\breve{\breve{\mathrm{y}}}}$
</td></tr>
<tr><td>
Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, le multiplicateur de production total est égal à la somme des éléments de la j^{ème} colonne de la matrice inverse augmentée $\breve{\mathrm{L}}$.

$$\breve{m}\,(output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} \breve{l}_{ij}$$
</td></tr>
<tr><td>
Si l'on souhaite comparer le multiplicateur total au multiplicateur simple, on calculera plutôt un multiplicateur qui se limite aux n produits originaux. Le multiplicateur de production total tronqué est égal à

$$\breve{m}_t\,(output - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} \breve{l}_{ij}$$

Assez logiquement, la prise en compte de l'impact de l'augmentation de la consommation des ménages consécutive à l'accroissement de leurs revenus a pour conséquence que les multiplicateurs de production totaux, même tronqués, seront supérieurs aux multiplicateurs de production simples.
</td></tr>
</table>

4.1.2. Les multiplicateurs d'emploi et de revenu de la demande finale

Pour estimer l'effet d'une variation de la demande finale sur l'emploi ou sur les revenus, il faut convertir la variation de la production consécutive à l'augmentation de la demande finale en une variation d'emplois/de revenus[11]. Dans les modèles entrées-sorties, l'emploi et les inputs primaires dépendent de façon linéaire de la production. Soit e, le vecteur d'emploi et v, le vecteur des inputs primaires, $e' = e'_c\,\hat{x}$ et $v' = v'_c\,\hat{x}$, avec e'_c, le vecteur des coefficients d'emploi (nombre d'emplois par euro de production) et v'_c, le vecteur des coefficients d'inputs primaires (inputs primaires par unité de production).

a. Les multiplicateurs d'emploi de la demande finale

Les multiplicateurs d'emploi de la demande finale mesurent l'impact d'une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits, sur l'emploi total de l'économie.

On distingue quatre multiplicateurs d'emploi de la demande finale, selon que le modèle soit ouvert ou fermé et selon que l'on reprenne au dénominateur, la variation de la demande finale (mesure absolue) ou la variation initiale de l'emploi (mesure relative).

Les multiplicateurs d'emploi simples

	Multiplicateurs d'emploi
Multiplicateur simple	Les multiplicateurs d'emploi simples découlent du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief. Ils mesurent l'emploi total qui est mobilisé dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits. L'**effet total** sur l'emploi d'une variation de la demande finale qui s'adresse à la production intérieure correspond à l'emploi total que cette demande finale additionnelle mobilise de façon directe et indirecte dans l'ensemble de l'économie, par le biais des approvisionnements intermédiaires. Il est égal à $e'_c\,L\,\Delta\bar{y}^d$. Il se compose d'un effet initial ($e'_c\,\Delta\bar{y}^d$), d'un effet direct ($e'_c\,A^d\,\Delta\bar{y}^d$) et d'un effet indirect ($e'_c L\,\Delta\bar{y}^d - e'_c\Delta\bar{y}^d - e'_c A^d\Delta\bar{y}^d$). Le **multiplicateur d'emploi simple** est égal à $\frac{e'_c\,L\,\Delta\bar{y}^d}{i'\,\Delta\bar{y}^d}$
	Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, **le multiplicateur d'emploi simple** est égal à la somme pondérée par les coefficients d'emploi, des éléments de la $j^{ème}$ colonne de la matrice inverse de Leontief $$m\,(employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ci} l_{ij}$$ Le multiplicateur d'emploi simple du produit j représente l'emploi total qui est mobilisé directement et indirectement dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure de produit j.

[11] Les revenus sont mesurés par les inputs primaires. Ceux-ci reprennent les différentes composantes de la valeur ajoutée plus les impôts nets des subventions sur les produits intermédiaires.

Les multiplicateurs d'emploi totaux

<table>
<tr><th></th><th>Multiplicateurs d'emploi</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplicateurs totaux</td><td>Les multiplicateurs d'emploi totaux découlent du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages. Ils mesurent l'emploi total qui est mobilisé dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits.

L'effet total de cette variation est égal à la somme des effets initiaux, directs, indirects et induits sur l'emploi. Les effets initiaux, directs et indirects correspondent à l'emploi qui est mobilisé au sein de la branche et de la chaîne de ses fournisseurs pour répondre à la demande finale additionnelle. Les effets induits représentent l'emploi additionnel qui est nécessaire pour répondre à l'augmentation de la demande de consommation finale de la part des ménages. L'effet total sur l'emploi est égal à $\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}}\, \breve{\mathrm{L}}\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}$, avec $\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}} = [\mathrm{e}'_{\mathrm{c}} \quad {}^{e_{n+1}}/_{x_{n+1}}]$

Le multiplicateur d'emploi total est égal à $\frac{\breve{\mathrm{e}}'_{\mathrm{c}}\, \breve{\mathrm{L}}\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}}{\mathrm{i}'\, \Delta\breve{\bar{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production d'un seul produit j, le multiplicateur d'emploi total est égal à la somme pondérée par les coefficients d'emploi des éléments de la j^{ème} colonne de la matrice inverse augmentée $\breve{\mathrm{L}}$

$$\breve{m}\ (employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \breve{l}_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>Si on souhaite se limiter aux n produits originaux, le multiplicateur d'emploi total tronqué du produit j est égal à

$$\breve{m}_t\ \ (employment - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \breve{l}_{ij}$$</td></tr>
</table>

Les multiplicateurs d’emploi de Type I

Multiplicateurs d’emploi

Multiplicateur de Type I

Les multiplicateurs d’emploi de Type I mesurent l’emploi total qui est mobilisé dans l’ensemble de l’économie par unité d’emploi initial associé à une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d’un ou de plusieurs produits.

L’**effet total** sur l’emploi découle du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief ($e'_c\, L\, \Delta\bar{y}^d$). L’**effet initial** sur l’emploi de la variation de la demande finale adressée à la production intérieure représente ici l’emploi qui est directement associé au choc exogène, soit $e'_c\, \Delta\bar{y}^d$.

Le **multiplicateur d’emploi de Type I** est égal à $\frac{e'_c\, L\, \Delta\bar{y}^d}{e'_c\, \Delta\bar{y}^d}$

Dans le cas d’une variation d’une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d’un seul produit j, **le multiplicateur d’emploi de Type I** est égal à

$$m\,(employment - to - demand)^I_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, l_{ij}}{e_{cj}} = \frac{m\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$

Le multiplicateur d’emploi de Type I du produit j donne la mesure dans laquelle les effets initiaux sur l’emploi d’une variation de la demande finale satisfaite par la production intérieure, sont gonflés lorsque les effets directs et indirects sont pris en considération.

Les multiplicateurs d’emploi de Type II

Multiplicateurs d’emploi

Multiplicateurs de Type II

Les multiplicateurs d’emploi de Type II découlent du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages. Ils mesurent l’emploi total qui est mobilisé dans l’ensemble de l’économie par unité d’emploi initial associé à une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d’un ou de plusieurs produits.

L’**effet total** sur l’emploi est égal à $\check{e}'_c\, \check{L}\, \Delta\check{\bar{y}}$. L’**effet initial** sur l’emploi représente l’emploi qui est directement associé à la variation de la demande finale adressée à la production intérieure, soit $\check{e}'_c\, \Delta\check{\bar{y}}$.

Le **multiplicateur d’emploi de Type II** est égal à $\frac{\check{e}'_c\, \check{L}\, \Delta\check{\bar{y}}}{\check{e}'_c\, \Delta\check{\bar{y}}}$

Dans le cas d’une variation d’une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d’un seul produit j, **le multiplicateur d’emploi de Type II** est égal à

$$m\,(employment - to - demand)^{II}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij}}{e_{cj}} = \frac{\check{m}\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$

Le multiplicateur d’emploi de Type II tronqué du produit j est lui égal à

$$m_t\,(employment - to - demand)^{II}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij}}{e_{cj}} = \frac{\check{m}_t\,(employment{-}to{-}demand)_j}{e_{cj}}$$

b. Les multiplicateurs de revenu de la demande finale

Selon le même principe, **les multiplicateurs de revenu de la demande finale** mesurent l'impact d'une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits, sur les inputs primaires totaux de l'économie.

On distingue 4 multiplicateurs de revenu de la demande finale, selon que le modèle soit ouvert ou fermé et selon que l'on choisisse au dénominateur, la variation de la demande finale (mesure absolue) ou la variation initiale des inputs primaires (mesure relative).

Les multiplicateurs de revenu simples

<table>
<tr><th></th><th>Multiplicateurs de revenu</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicateur simple</td><td>Les multiplicateurs de revenu simples découlent du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief. Ils mesurent les inputs primaires totaux qui sont crées dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits.

L'effet total sur les inputs primaires d'une variation de la demande finale qui s'adresse à la production intérieure correspond aux inputs primaires additionnels que cette demande finale supplémentaire crée dans l'ensemble de l'économie, par le biais des approvisionnements intermédiaires. Il est égal à $v_c' \, L \, \Delta\bar{y}^d$. Il se décompose en un effet initial ($v_c' \, \Delta\bar{y}^d$), un effet direct ($v_c' \, A^d \, \Delta\bar{y}^d$) et un effet indirect ($v_c' L \, \Delta\bar{y}^d - v_c' \Delta\bar{y}^d - \, v_c' \, A^d \Delta\bar{y}^d$).

Le multiplicateur de revenu simple est égal à $\frac{v_c' \, L \, \Delta\bar{y}^d}{i' \, \Delta\bar{y}^d}$</td></tr>
<tr><td>Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, le multiplicateur de revenu simple est égal à la somme pondérée par les coefficients d'inputs primaires, des éléments de la j^{ème} colonne de la matrice inverse de Leontief.

$$m\,(primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ci} \, l_{ij}$$

Le multiplicateur de revenu simple du produit j représente les inputs primaires totaux qui sont crées dans l'ensemble de l'économie pour répondre à une demande finale de un euro adressée à la production intérieure de produit j.</td></tr>
</table>

Les multiplicateurs de revenu totaux

<table>
<tr><th></th><th>Multiplicateurs de revenu</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Les multiplicateurs totaux</td><td>Les multiplicateurs de revenu totaux découlent du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages. Ils mesurent les inputs primaires totaux qui sont engendrés dans l'ensemble de l'économie par euro de demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits

L'effet total sur les inputs primaires est égal à la somme des effets initiaux, directs, indirects et induits. Les effets initiaux, directs et indirects correspondent aux inputs primaires que cette demande finale additionnelle engendre au sein de la branche et de la chaîne de ses fournisseurs, par le biais des approvisionnements intermédiaires. Les effets induits représentent les inputs primaires additionnels qui sont créés par l'augmentation de la demande de consommation finale provenant des ménages. L'effet total sur les inputs primaires est égal à $\check{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}' \, \check{\mathrm{L}} \, \Delta\check{\check{\mathrm{y}}}$, avec $\check{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}' = [\mathrm{v}_{\mathrm{c}}' \quad {}^{v_{n+1}}/_{x_{n+1}}]$

Le multiplicateur de revenu total est égal à $\frac{\check{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}' \, \check{\mathrm{L}} \, \Delta\check{\check{\mathrm{y}}}}{\mathrm{i}' \Delta\check{\check{\mathrm{y}}}}$</td></tr>
<tr><td>Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, le multiplicateur de revenu total est égal à la somme pondérée par les coefficients d'inputs primaires, des éléments de la j^{ème} colonne de la matrice inverse augmentée $\check{\mathrm{L}}$

$$\check{\check{m}}\,(primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$$</td></tr>
<tr><td>Si l'on souhaite se limiter aux n produits originaux, le multiplicateur de revenu total tronqué du produit j est égal à

$$\check{\check{m}}_t\ \ (primary\ inputs - to - demand)_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$$</td></tr>
</table>

Les multiplicateurs de revenu de Type I

<table>
<tr><td></td><td>Multiplicateurs de revenu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicateur de Type I</td><td>Les multiplicateurs de revenu de Type I découlent du modèle entrées-sorties classique (ouvert) de Leontief. Ils mesurent les inputs primaires totaux qui sont mobilisés dans l'ensemble de l'économie par unité d'input primaire initial associé à une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits.

L'effet initial représente les inputs primaires qui sont directement associés à l'augmentation de la demande finale adressée à la production intérieure, soit $\mathrm{v}'_{\mathrm{c}}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$. L'effet total correspond aux inputs primaires supplémentaires que la demande finale additionnelle crée dans l'ensemble de l'économie, par le biais des approvisionnements intermédiaires, soit $\mathrm{v}'_{\mathrm{c}}\,\mathrm{L}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}$.

Le multiplicateur de revenu de Type I est égal à $\frac{\mathrm{v}'_{\mathrm{c}}\,\mathrm{L}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{v}'_{\mathrm{c}}\,\Delta\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$</td></tr>
<tr><td>Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, le multiplicateur de revenu de Type I est égal à

$$m\,(primary\ inputs - to - demand)^{I}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij}}{v_{cj}} = \frac{m\,(primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
</table>

Les multiplicateurs de revenu de Type II

<table>
<tr><td></td><td>Multiplicateurs de revenu</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplicateur de Type II</td><td>Les multiplicateurs de revenu de Type II découlent du modèle entrées-sorties fermé par rapport à la consommation des ménages. Ils mesurent les inputs primaires totaux qui sont mobilisés dans l'ensemble de l'économie par unité d'input primaire initial associé à une variation de la demande finale adressée à la production intérieure d'un ou de plusieurs produits.

L'effet initial représente les inputs primaires qui sont directement associés à l'augmentation de la demande finale adressée à la production intérieure, soit $\check{\mathrm{v}}'_{\mathrm{c}}\,\Delta\check{\bar{\bar{\mathrm{y}}}}$. L'effet total est égal à la somme des effets initiaux, directs, indirects et induits sur les inputs primaires, soit $\check{\mathrm{v}}'_{\mathrm{c}}\,\check{\mathrm{L}}\,\Delta\check{\bar{\bar{\mathrm{y}}}}$

Le multiplicateur de revenu de Type II est égal à $\frac{\check{\mathrm{v}}'_{\mathrm{c}}\,\check{\mathrm{L}}\,\Delta\check{\bar{\bar{\mathrm{y}}}}}{\check{\mathrm{v}}'_{\mathrm{c}}\,\Delta\check{\bar{\bar{\mathrm{y}}}}}$</td></tr>
<tr><td>Dans le cas d'une variation d'une unité de la demande finale adressée à la production intérieure d'un seul produit j, le multiplicateur de revenu de Type II est égal à

$$m\,(primary\ inputs - to - demand)^{II}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij}}{v_{cj}} = \frac{\check{m}\,(primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
<tr><td>Le multiplicateur de revenu de Type II tronqué du produit j est lui égal à

$$m_t(primary\ inputs - to - demand)^{II}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij}}{v_{cj}} = \frac{\check{m}_t\,(primary\ inputs{-}to{-}demand)_j}{v_{cj}}$$</td></tr>
</table>

4.1.3. Le choix des multiplicateurs

Il est important d'insister sur le fait que le choix du type de multiplicateurs de la demande finale que l'on va estimer (simple, total, de type I ou de type II) n'est pas anodin et qu'il va conditionner l'interprétation qui pourra en être faite.

Faut-il faire le choix d'un modèle ouvert ou d'un modèle fermé ?

Les multiplicateurs simples et de Type I découlent d'un modèle ouvert, alors que les multiplicateurs totaux et de Type II sont dérivés d'un modèle fermé. Selon Miller et Blair (2009, p. 253) "It is generally conceded that Type I multipliers probably underestimate economic impacts (since households activity is absent) and Type II multipliers probably give an overestimate (because of the rigid assumptions about labor incomes and attendant consumer spending). For example, Oosterhaven, Piek and Stedler (1986, p. 69) suggest 'These two multipliers may be considered as upper and lower bounds on the true indirect effect of an increase in final demand; a realistic estimate generally lies roughly halfway between Type I and Type II multipliers'."

Faut-il faire le choix de multiplicateurs absolus ou relatifs ?

Ce choix va dépendre de la question à laquelle on souhaite répondre.

- Les multiplicateurs absolus, qu'ils soient simples ou totaux, représentent les effets totaux d'une variation de la demande finale *par euro de demande finale*. **Ils ne peuvent être multipliés que par des éléments de la demande finale exogène**.
- Les multiplicateurs relatifs (de Type I ou de Type II) indiquent dans quelle mesure les effets initiaux sur l'emploi, les inputs primaires…, d'un changement de la demande finale, sont gonflés lorsque les effets directs et indirects (et induits, dans le cas de modèles fermés) sont pris en compte. Un multiplicateur élevé peut représenter un effet total important comme il peut être le reflet d'un effet initial faible. Ces multiplicateurs ne doivent en aucun cas être multipliés par la demande finale ou la production. **Ils sont destinés à être multipliés par une mesure d'emplois, d'inputs primaires...**

Les publications des premiers tableaux entrées-sorties calculés par le Bureau fédéral du Plan, à savoir ceux de 1985 et 1990 (ICN, 1998 et 1999), reprenaient des multiplicateurs d'emploi et de revenu simples. A partir des tableaux entrées-sorties 1995 (ICN, 2003), la définition des multiplicateurs qui a été retenue dans nos applications est celle des multiplicateurs d'emploi et de revenu de type I.

4.1.4. Les multiplicateurs de la demande finale : tableaux récapitulatifs

Le tableau 4 et le tableau 5 ci-dessous reprennent les différents multiplicateurs de la demande finale. Le premier tableau donne les multiplicateurs de production, d'emploi et de revenu de la demande finale adressée à la production intérieure d'une branche j. Le second présente les vecteurs des différents multiplicateurs de production, d'emploi et de revenu de la demande finale.

Tableau 4 Multiplicateurs de production, d'emploi et de revenu de la demande finale adressée à la branche j

Multiplicateurs	de production	d'emploi	de revenu
simple	$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} e_{ci} l_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij}$
total	$\sum_{i=1}^{n+1} \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$
total tronqué	$\sum_{i=1}^{n} \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij}$
de Type I		$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, l_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, l_{ij} / v_{cj}$
de Type II		$\sum_{i=1}^{n+1} e_{ci}\, \check{l}_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n+1} v_{ci}\, \check{l}_{ij} / v_{cj}$
de Type II tronqué		$\sum_{i=1}^{n} e_{ci}\, \check{l}_{ij} / e_{cj}$	$\sum_{i=1}^{n} v_{ci}\, \check{l}_{ij} / v_{cj}$

Tableau 5 Vecteurs des multiplicateurs de production, d'emploi et de revenu de la demande finale *(dimension (1xn))*

Multiplicateurs	de production	d'emploi	de revenu
simple	$\mathrm{i}'\ \mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{e}_\mathrm{c}'\ \mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{v}_\mathrm{c}'\ \mathrm{L}$ (1 x n) (n x n)
total	$\mathrm{i}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)	$\check{\mathrm{e}}_\mathrm{c}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)	$\check{\mathrm{v}}_\mathrm{c}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n)
total tronqué	$\mathrm{i}'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{e}_\mathrm{c}'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)	$\mathrm{v}_\mathrm{c}'\check{\mathrm{L}}_{11}$ (1 x n) (n x n)
de Type I		$\mathrm{e}_\mathrm{c}'\mathrm{L}(\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)	$\mathrm{v}_\mathrm{c}'\mathrm{L}(\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)
de Type II		$\check{\mathrm{e}}_\mathrm{c}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n) (n x n)	$\check{\mathrm{v}}_\mathrm{c}' \begin{bmatrix} \check{\mathrm{L}}_{11} \\ \check{\mathrm{L}}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x (n+1)) ((n+1) x n) (n x n)
de Type II tronqué		$\mathrm{e}_\mathrm{c}'\ \check{\mathrm{L}}_{11}(\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)	$\mathrm{v}_\mathrm{c}'\ \check{\mathrm{L}}_{11}(\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{c}')^{-1}$ (1 x n) (n x n) (n x n)

4.2. Les multiplicateurs découlant d'une variation de la production

Le chapitre 4.1 a montré que lorsqu'il s'agit de répondre à des questions d'impact de la demande finale sur la production ou sur toutes autres variables qui sont liées à la production (telles que l'emploi ou la consommation d'énergie), l'utilisation des modèles entrées-sorties classiques de Leontief ou des modèles entrées-sorties fermés s'impose.

Mais qu'en est-il lorsque la question qui se pose est celle des effets d'un choc exogène qui affecte la production (et non la demande finale) ? Différents modèles entrées-sorties peuvent apporter une réponse à ce type de questions. Il s'agit toutefois d'être prudent quant à une utilisation automatique des multiplicateurs dérivés de ceux-ci. Chaque cas demande à être analysé individuellement, afin de choisir le modèle entrées-sorties le plus approprié pour appréhender correctement la situation.

Ainsi, si l'on souhaite modéliser des situations dans lesquelles la production *totale* d'une ou de plusieurs branches est fixée de façon exogène (existence de quotas, ressources naturelles limitées, introduction d'une nouvelle activité dans une région…), on aura recours à un **modèle entrées-sorties mixte**. Ces modèles sont en effet construits de façon telle qu'il n'y aura pas d'effet retour des productions endogènes sur les productions exogènes.

Si l'on désire plutôt estimer l'impact sur la production totale de l'économie d'un choc *initial* exogène affectant la production d'une branche donnée, on utilisera le **modèle entrées-sorties classique de Leontief**. Dans ce cas, contrairement au cas précédent, le choc exogène pourra avoir des effets sur la branche qui subit le choc exogène.

4.2.1. Multiplicateurs de la production dérivés du modèle entrées-sorties mixte

Lorsque les modèles entrées-sorties mixtes sont appliqués à des situations dans lesquelles seule la production exogène varie, il est possible de calculer l'impact total sur la production de l'économie d'un changement exogène de la production *totale* d'une ou de plusieurs branches d'activité et d'en dériver ensuite un multiplicateur de production.

a. Cas général : plusieurs productions exogènes

Soit le modèle entrées-sorties mixte, combiné avec l'hypothèse que seules les productions exogènes (des n – k dernières branches) subissent des changements ($\Delta\,\bar{\mathrm{x}} \neq 0$ et $\Delta\,\bar{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}} = 0$) :

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathrm{x} \\ k\;x\;1 \\ \Delta \mathrm{y}^{\mathrm{d}} \\ (n-k)\;x\;1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}^{k} & \mathrm{L}^{k}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ k\;x\;k & k\;x\;(n-k) \\ -\mathrm{A}_{21}^{\mathrm{d}}\mathrm{L}^{k} & \left(\mathrm{I}-\mathrm{A}_{22}^{\mathrm{d}}\right)-\mathrm{A}_{21}^{\mathrm{d}}\mathrm{L}^{k}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}} \\ (n-k)x\;k & (n-k)\;x\;(n-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k\;x\;1 \\ \Delta\bar{\mathrm{x}} \\ (n-k)\;x\;1 \end{bmatrix}$$

L'effet sur la production endogène (des k premiers produits) d'une variation de la production exogène est égal à : $\mathrm{i}'\Delta\,\mathrm{x} = \mathrm{i}'\mathrm{L}^{k}\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{d}}\Delta\,\bar{\mathrm{x}}$. *L'effet total sur la production* est obtenu en y ajoutant l'effet sur la production exogène. Ce dernier est fixé à $\mathrm{i}'\Delta\,\bar{\mathrm{x}}$.

Le **multiplicateur de production de la production** est égal à

$$\frac{i'\Delta\,\bar{x} + i'\,\Delta\,x}{i'\Delta\,\bar{x}} = 1 + \frac{i'L^{k}A_{12}^{d}\,\Delta\,\bar{x}}{i'\Delta\,\bar{x}}$$

Dans le cas d'une variation unitaire de la production exogène d'une seule branche (soit la branche n), le **multiplicateur de production de la branche n** est égal à

$$1 + i'L^{(n-1)}A_{12}^{d}$$

soit la somme des n-1 éléments du vecteur colonne $L^{(n-1)}A_{12}^{d}$ plus une unité (qui correspond à la production exogène). Ce multiplicateur indique la production qui est nécessaire directement et indirectement dans toute l'économie pour assurer une production supplémentaire *totale* de 1 euro de produit n.

L'utilisation de la formulation alternative (« the one-sided mixed variable model »), présentée au point 3.2.2, donne les mêmes résultats.

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L^{k} & L^{k}A_{12}^{d}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \Delta\bar{x}\end{bmatrix} = \tilde{L}^{n}\begin{bmatrix}0\\ \Delta\bar{x}\end{bmatrix}$$

ou

$$\Delta x = \left(I - \tilde{A}\right)^{-1}\Delta\bar{y}_{\text{Mixed}} = \tilde{L}^{n}\Delta\bar{y}_{\text{Mixed}}$$

Cette formulation offre l'avantage qu'elle permet de présenter les multiplicateurs de la production sous une forme classique :

Le **multiplicateur de production de la production** est égal à $\dfrac{i'\tilde{L}^{n}\Delta\,\bar{y}_{\text{Mixed}}}{i'\Delta\,\bar{x}}$

Le **multiplicateur d'emploi de la production** est égal à $\dfrac{e_c'\,\tilde{L}^{n}\Delta\,\bar{y}_{\text{Mixed}}}{i'\Delta\,\bar{x}}$

Le **multiplicateur de revenu de la production** est égal à $\dfrac{v_c'\,\tilde{L}^{n}\Delta\,\bar{y}_{\text{Mixed}}}{i'\Delta\,\bar{x}}$

b. Cas particulier : une seule production exogène

Dans le cas spécifique où une seule production totale est exogène ($\bar{x}_j$), il existe une approche alternative, plus aisée à estimer, qui donne les mêmes résultats que l'application du modèle mixte. Cette approche fait référence au concept d' « output-to-output multiplier » présenté par Miller et Blair (1985).

Dans le modèle entrées-sorties classique de Leontief, les éléments de la matrice inverse traduisent les variations de la demande finale adressée à la production intérieure en variations de la production totale, $\Delta x_i = l_{ij} \Delta y_j$ ou $l_{ij} = \Delta x_i / \Delta y_j$. Si l'on considère l'élément l_{jj} qui se trouve sur la diagonale, il est égal à $\Delta x_j / \Delta y_j$ ou encore $\Delta x_j = l_{jj} \Delta y_j$.

Si l'on définit l'élément l_{ij}^* comme le rapport entre l_{ij} et l_{jj}, on obtient alors :

$$l_{ij}^* = l_{ij}/l_{jj} = \frac{\Delta x_i / \Delta y_j}{\Delta x_j / \Delta y_j} = \Delta x_i / \Delta x_j$$

ou encore

$$\Delta x_i = l_{ij}^* \, \Delta x_j$$

Les éléments l_{ij}^* peuvent être considérés comme des **multiplicateurs de production découlant d'une variation de la production** (output-to-output multipliers). Ils indiquent la variation de la production de la branche i qui sera nécessaire pour répondre à une variation d'un euro de la production de la branche j.

Sous forme matricielle, la matrice des éléments l_{ij}^* est obtenue en divisant chaque élément des différentes colonnes de la matrice L, par l'élément qui se trouve sur sa diagonale, soit $L^* = L \, \hat{L}^{-1}$.

Le vecteur $\Delta x^* = L^* \, \Delta \bar{x}_j$, avec $\Delta \bar{x}_j' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \Delta \bar{x}_j & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, reprend les productions des différentes branches de l'économie qui sont nécessaires pour répondre à la variation totale de la production de la seule branche j ($\Delta \bar{x}_j$).

On obtient **le multiplicateur de production de la production exogène de la branche j** en prenant la somme des éléments de la j[ème] colonne de la matrice L^*

$$m\,(output - to - output)_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}^*$$

Ce multiplicateur indique la production de l'ensemble de l'économie qui est nécessaire directement et indirectement pour répondre à une unité de production totale de la branche j.

Lorsqu'il s'agit d'estimer l'impact de la production d'un seul secteur exogène, cette approche alternative donne les mêmes résultats pour les productions endogènes que l'application du modèle mixte. Elle est particulièrement facile à mettre en œuvre et elle permet de voir le lien existant entre les multiplicateurs de production simple de la demande finale de la branche j et les multiplicateurs de production de la production de cette branche. Les premiers sont toujours supérieurs aux seconds de $\left(l_{jj} - 1\right)$ x 100 pourcent.

4.2.2. Multiplicateurs de la production dérivés du modèle entrées-sorties classique

Si l'on souhaite plutôt estimer l'impact sur la production de l'économie d'un choc *initial* exogène affectant la production d'une branche donnée, on peut utiliser le modèle entrées-sorties classique de Leontief.

Prenons le cas d'une branche d'activité j qui décide d'augmenter sa production de façon exogène d'un euro. Pour réaliser cette production, elle va adresser une demande d'inputs supplémentaires à ses fournisseurs, qui sera égale à la $j^{ème}$ colonne de la matrice A. Cette nouvelle demande (déterminée de façon endogène) forme en quelque sorte une demande exogène, qui aura des effets indirects comparables à une variation de la demande finale. L'impact total de cette nouvelle demande sur l'économie sera alors égal à la $j^{ème}$ colonne de la matrice L A .

De façon plus générale, si $\Delta\bar{\bar{x}}_j$ représente le choc initial sur la production de la branche j, l'effet sur la production de l'économie d'un choc initial exogène sur la production de la branche j est égal à :

$$i'\Delta \mathrm{x} = i'\mathrm{L}\,\mathrm{A}\,\Delta\bar{\bar{\mathrm{x}}}_\mathrm{j}, \text{ avec } \Delta\bar{\bar{\mathrm{x}}}_\mathrm{j}' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \Delta\bar{\bar{x}}_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Le multiplicateur associé est égal à $\widetilde{m} = i'\mathrm{LA}$.

Mais $\mathrm{L\,A} = \mathrm{L}\big(\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \mathrm{A})\big) = \mathrm{L} - \mathrm{L}(\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{L} - \mathrm{L}(\mathrm{L})^{-1} = \mathrm{L} - \mathrm{I}$.

Le multiplicateur est donc égal à $\widetilde{m} = i'\mathrm{LA} = i'(\mathrm{L} - \mathrm{I})$.

Ce multiplicateur est le 'multiplicateur itératif net' de de Mesnard (2002). Il représente les effets directs et indirects sur la production rapportés à l'effet initial sur la production. Contrairement au multiplicateur traditionnel de la demande finale (appelé 'multiplicateur brut'), il ne comprend pas le choc initial au numérateur. En le rajoutant, on retrouve le multiplicateur simple de la demande finale (ou total, dans le cas d'un modèle fermé).

Le multiplicateur itératif net a été développé pour répondre à la question des effets sur la production de l'économie d'un choc initial exogène sur la production (plutôt que sur la demande finale). En ce sens, il remplit sa fonction. Cependant, comme le dit Oosterhaven (2007, p. 281) : 'this is a useful multiplier, but it is an old and regular, i.e. gross multiplier. Numerically the iterative net multipliers equal the column sums of the Leontief-inverse minus 1, which means that they do not provide more information than is already contained in the gross output multipliers i'L '.

5. Les mesures de linkage

Par son activité de production, une branche d'activité est doublement liée aux autres branches de l'économie :

- l'augmentation de sa production engendre de sa part une demande accrue auprès des branches qui produisent ses inputs. Le terme « backward linkage » est utilisé pour indiquer le lien qui existe entre une branche particulière et les branches en amont auxquelles elle achète ses inputs ;
- l'augmentation de sa production engendre une offre accrue de produits à destination des branches qui utilisent sa production comme inputs pour leur propre production. Le terme « forward linkage » est utilisé pour décrire le lien qui existe entre une branche particulière et les branches en aval auxquelles elle vend sa production.

Différentes mesures ont été proposées dans la littérature pour estimer les liens en amont et en aval que les branches d'activité entretiennent entre elles. Ces mesures reposent sur deux méthodes, qui trouvent leurs racines dans le modèle entrées-sorties classique de Leontief et le modèle de prix de Ghosh.

- La première méthode, intitulée parfois *'The Classical Multiplier Method'*, mesure les liens en amont et en aval d'une branche d'activité sur base des éléments des matrices A, B, L et G. Les premiers travaux sont dus à Rasmussen (1956), Hirschman (1958) et Chenery et Watanabe (1958).
- La seconde méthode, intitulée *'The Hypothetical Extraction Method'* (HEM), a été proposée initialement par Paelinck et al. (1965) et Strassert (1968). Pour évaluer le réseau sous-jacent des liens qu'entretient une branche d'activité, on simule l'élimination de cette branche de l'économie et on mesure la perte de production qui en résulte.

Lorsque les mesures de linkage sont appliquées à une économie particulière, la comparaison de l'intensité des liens en amont et en aval des différentes branches au sein de cette économie permet d'identifier les branches d'activité « clés » pour celle-ci. Dans ce cas, puisque l'intérêt se porte sur l'économie intérieure, on utilisera les modèles de Leontief et de Ghosh basés sur le tableau entrées-sorties pour la production intérieure, tels qu'ils ont été définis dans la première partie.

Les mesures de linkage peuvent également être utilisées pour comparer les structures de production de différents pays. Ce qui importe dans ce cas c'est la comparaison internationale de différents processus de production, indépendamment de l'origine des produits consommés. Le modèle de Leontief et le modèle de prix de Ghosh sont alors basés sur le tableau entrées-sorties total et les matrices A et B sont dérivées de la matrice des consommations intermédiaires totales (Z). Le modèle de Leontief se réécrit : $x = Z\,i + (y - m)$, avec m le vecteur des importations. Le modèle de prix de Ghosh devient : $x = Z'\,i + v$.

Les deux méthodes qui ont été évoquées plus haut sont amplement utilisées dans la littérature pour identifier et mesurer les branches d'activité clé d'une économie. Cependant, seule la méthode HEM permet de dériver un véritable indicateur de l'importance économique d'une branche d'activité par une mesure unique des liens *totaux* que celle-ci entretient avec le reste de l'économie. Les mesures de linkage HEM permettent également de définir l'importance relative d'une branche pour une économie selon différents facteurs : économiques, sociaux, environnementaux, par exemples en termes de production, de créations d'emplois, d'émissions polluantes…

5.1. 'The Classical Multiplier Method'

Les mesures de linkage dérivées de cette méthode comprennent des mesures des liens en amont et en aval, des mesures des liens directs[12] et totaux, des mesures simples et normalisées.

5.1.1. Backward linkages

Le terme « backward linkage » est utilisé pour indiquer le lien qui existe entre une branche particulière et les branches en amont auxquelles elle achète ses inputs. Les mesures de backward linkages sont estimées dans la cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief.

Backward Linkages - Mesures simples

The Classical Multiplier Method

Liens directs (d)

Une mesure des liens directs en amont d'une branche d'activité est donnée par la somme des coefficients techniques d'inputs de cette branche (somme en colonne de la matrice A^d). Elle indique dans quelle mesure la production de cette branche d'activité dépend des livraisons intermédiaires.

	Branche j	Vecteur
Direct backward linkage	$\mathrm{BL(d)_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{d}$	$\mathrm{b(d)} = [\mathrm{BL(d)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{BL(d)}_n] = \mathrm{i'A^d}$

Liens totaux (t)

Une mesure des liens directs et indirects existant en amont dans une économie peut être obtenue en prenant la somme en colonne des éléments de la matrice inverse de Leontief ($\mathrm{L} = (\mathrm{I} - \mathrm{A^d})^{-1}$). Cette mesure est égale au multiplicateur de production simple.

	Branche j	Vecteur
Total backward linkage	$\mathrm{BL(t)}_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}$	$\mathrm{b(t)} = [\mathrm{BL(t)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{BL(t)}_n] = \mathrm{i'L}$

$\mathrm{BL(t)}_j$ mesure l'effet direct et indirect d'une augmentation d'un euro de la demande finale adressée à la production intérieure de produit j sur la production de l'ensemble de l'économie.

Variante : exclure de la mesure les éléments qui se trouvent sur la diagonale de la matrice L, pour mesurer la dépendance en amont d'une branche d'activité au *reste* de l'économie.

[12] "Measures of direct linkages are simply transformations of input-output account data, but they are not always sufficiently interesting because they do not capture much of the inherent complexity of an economy" (Miller et Lahr, 2001, p. 410).

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Backward Linkages - Mesures normalisées</td></tr>
<tr><td rowspan="6">The Classical Multiplier Method</td><td colspan="3">La littérature propose différentes façons de normaliser les mesures simples, par exemple en les divisant par leur moyenne arithmétique[13].</td></tr>
<tr><td>Liens directs (d)</td><td>Branche j</td><td>Vecteur</td></tr>
<tr><td>Normalized direct backward linkage</td><td>$\overline{\mathrm{BL}}(\mathrm{d})_j = \frac{\mathrm{BL}(\mathrm{d})_j}{(1/n)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{BL}(\mathrm{d})_j}$</td><td>$\bar{\mathrm{b}}(\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}}{(\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\mathrm{i})/n} = \frac{n\,\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}}{\mathrm{i}'\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\mathrm{i}}$</td></tr>
<tr><td>Liens totaux (t)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Normalized total backward linkage</td><td>$\overline{\mathrm{BL}}(\mathrm{t})_j = \frac{\mathrm{BL}(\mathrm{t})_j}{(1/n)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{BL}(\mathrm{t})_j}$</td><td>$\bar{\mathrm{b}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{i}'\mathrm{L}}{(\mathrm{i}'\mathrm{L}\mathrm{i})/n} = \frac{n\,\mathrm{i}'\mathrm{L}}{\mathrm{i}'\mathrm{L}\mathrm{i}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La valeur moyenne de ces mesures est l'unité. Les branches qui ont des liens en amont supérieurs à la moyenne présentent des indices supérieurs à 1. Les branches qui ont des liens en amont plus faibles que la moyenne présentent des indices inférieurs à 1.</td></tr>
</table>

5.1.2. Forward linkages

Le terme « forward linkage » est utilisé pour décrire le lien qui existe entre une branche particulière et les branches en aval auxquelles elle vend sa production.

A l'origine, les mesures des liens en aval étaient estimées dans le cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief, comme la somme en ligne des éléments de la matrice A^d (direct forward linkage) ou L (total forward linkage). A partir du milieu des années 70, ces premières mesures des liens en aval ont été remises en question car elles reposaient sur l'hypothèse peu probable d'une augmentation unitaire simultanée de la production de toutes les branches (dans le cas d'une mesure des liens directs) ou de la demande finale adressée à toutes les branches (dans le cas d'une mesure des liens totaux).

Il a alors été suggéré que le modèle entrées-sorties de prix de Ghosh (qui repose sur les coefficients d'allocation de la production) était plus approprié pour répondre à la question de la destination de la production que le modèle classique de Leontief (qui est basé sur les coefficients techniques d'input) (Jones, 1976).

13 Différentes moyennes pondérées ont également été suggérées.

The Classical Multiplier Method

Forward Linkages - Mesures simples

Liens directs (d)

Une mesure directe des liens en aval d'une branche d'activité est donnée par la somme des coefficients d'allocation de cette branche (somme en ligne des éléments de la matrice B^d). Elle indique dans quelle mesure la production de cette branche d'activité est destinée au processus de production des autres branches de l'économie.

	Branche i	Vecteur
Direct forward linkage	$\mathrm{FL(d)}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{d}$	$\mathrm{f(d)} = [\mathrm{FL(d)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{FL(d)}_n] = \mathrm{B^d i}$

Liens totaux (t)

Une mesure des liens directs et indirects existant en aval dans une économie peut être obtenue en prenant la somme en ligne des éléments de la matrice inverse de Ghosh $(\mathrm{G} = (\mathrm{I} - \mathrm{B^d})^{-1})$. Cette mesure est aussi connue sous le nom de multiplicateur d'inputs simple.

	Branche i	Vecteur
Total forward linkage	$\mathrm{FL(t)}_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}$	$\mathrm{f(t)} = [\mathrm{FL(t)}_1 \quad \dots \quad \mathrm{FL(t)}_n] = \mathrm{Gi}$

$\mathrm{FL(t)}_i$ mesure l'effet direct et indirect d'une augmentation unitaire du prix des inputs primaires de la branche i sur la valeur de la production de toutes les branches de l'économie.

Variante : exclure de la mesure les éléments qui se trouvent sur la diagonale de la matrice G, pour mesurer la dépendance en aval d'une branche d'activité au *reste* de l'économie.

The Classical Multiplier Method

Forward Linkages - Mesures normalisées

La littérature propose différentes façons de normaliser les mesures simples, par exemple en les divisant par leur moyenne arithmétique.

Liens directs (d)	Branche i	Vecteur
Normalized direct forward linkage	$\overline{\mathrm{FL}}(\mathrm{d})_i = \dfrac{\mathrm{FL(d)}_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n} \mathrm{FL(d)}_i}$	$\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{d}) = \dfrac{\mathrm{B^d i}}{(\mathrm{i'B^d i})/n} = \dfrac{n\,\mathrm{B^d i}}{\mathrm{i'B^d i}}$
Liens totaux (t)		
Normalized total forward linkage	$\overline{\mathrm{FL}}(\mathrm{t})_i = \dfrac{\mathrm{FL(t)}_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n} \mathrm{FL(t)}_i}$	$\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{t}) = \dfrac{\mathrm{Gi}}{(\mathrm{i'Gi})/n} = \dfrac{n\,\mathrm{Gi}}{\mathrm{i'Gi}}$

La valeur moyenne de ces mesures est l'unité. Les branches qui ont des liens en aval plus forts que la moyenne présentent des indices supérieurs à 1. Les branches qui ont des liens en aval plus faibles que la moyenne présentent des indices inférieurs à 1.

5.1.3. Classification des résultats des mesures en amont et en aval

Les études qui utilisent ces mesures de linkage pour identifier les branches « clés » d'une économie, combinent couramment les résultats obtenus par une branche d'activité en amont et en aval (généralement au niveau des mesures normalisées). Sur base de ceux-ci, les branches d'activité sont souvent classées en quatre catégories. Le tableau 6 reprend cette classification.

Tableau 6 Classification des branches d'activité en fonction des résultats des mesures normalisées de linkage (en amont et en aval)

		Normalized Direct or Total Forward Linkages	
		Faible (<1)	Elevé (>1)
Normalized Direct or Total Backward Linkages	**Faible (<1)**	(I) Indépendante dans l'ensemble, des autres branches d'activité	(II) Dépendante de la demande intermédiaire qui s'adresse à elle
	Elevé (>1)	(III) Dépendante de l'offre intermédiaire qui s'adresse à elle	(IV) Dépendante dans l'ensemble, des autres branches d'activité

Source : Miller et Blair (2009)

5.1.4. Net backward et Net forward linkages

La mesure des liens en amont et en aval nets représente une mesure alternative de l'importance économique d'une branche d'activité. Elle a la particularité de ne pas se limiter à mesurer la dépendance de l'économie à une branche d'activité (mesure unilatérale) mais aussi de regarder la dépendance de cette branche d'activité au reste de l'économie (mesure bilatérale).

a. Net backward linkages

La mesure des liens en amont nets a été introduite par Oosterhaven et Stedler en 2002.

Les liens en amont nets du secteur j sont définis comme le ratio de la production qui est engendrée dans l'ensemble de l'économie par la demande finale adressée à la production intérieure de la branche j et de la production de la branche j qui est nécessaire pour satisfaire la demande finale adressée à toutes les branches d'activité.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} = \frac{BL(t)_j\, y_j}{x_j} = \frac{\text{somme de la j}^{\text{ème}}\text{ colonne de la matrice L}\hat{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}{\text{somme de la j}^{\text{ème}}\text{ ligne de la matrice L}\hat{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}}$$

Une mesure $\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}$ supérieure à 1 signifie que la production qui est engendrée dans l'ensemble de l'économie par la demande finale adressée à la production intérieure de la branche j est supérieure à la production engendrée dans la branche j par la demande finale adressée à toutes les branches d'activité. En d'autres termes, cela indique que le reste de l'économie dépend davantage en amont de la branche j que la branche j ne dépend en amont du reste de l'économie.

b. Net forward linkages

Temurshoev et Oosterhaven (2010) proposent une mesure des liens en aval nets, équivalente à la mesure de Oosterhaven et Stedler (2002).

Les liens en aval nets du secteur j sont définis comme le ratio de la production qui est occasionnée dans l'ensemble de l'économie par les inputs primaires augmentés des importations intermédiaires de la branche j et de la production de la branche j qui est provoquée par les inputs primaires augmentés des importations intermédiaires de toutes les branches d'activité.

$$\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} = \frac{v_j FL(t)_j}{x_j} = \frac{\text{somme de la j}^{\text{ème}}\text{ ligne de la matrice } \hat{\hat{\mathrm{v}}}\mathrm{G}}{\text{somme de la j}^{\text{ème}}\text{ colonne de la matrice } \hat{\hat{\mathrm{v}}}\mathrm{G}}$$

Une mesure $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}}$ supérieure à 1 signifie que la production qui est engendrée dans l'ensemble de l'économie par les inputs primaires de la branche j est supérieure à la production engendrée dans la branche j par les inputs primaires de toutes les branches d'activité. Elle indique que le reste de l'économie dépend davantage en aval de la branche j que la branche j ne dépend en aval du reste de l'économie.

5.2. 'The Hypothetical Extraction Method'

L'approche HEM consiste à mesurer l'importance d'une branche d'activité en extrayant cette branche de l'économie afin de mesurer sa contribution totale à la production de cette économie. Cette méthode repose sur l'hypothèse que la structure de production des autres branches de l'économie ne change pas. Implicitement, cela signifie que des importations se substituent aux achats et aux livraisons de la branche que l'on a extraite, ce qui constitue « une fuite » dans le processus de production.

La méthode HEM a tout d'abord été appliquée complètement (élimination complète de la branche), ce qui a permis une mesure des liens totaux des différentes branches d'activité (point 5.2.1). Elle a ensuite été appliquée de façon partielle par Dietzenbacher et van der Linden (1997) (élimination des achats d'inputs intermédiaires domestiques/des livraisons d'inputs intermédiaires) pour mesurer séparément les liens en amont et ceux en aval (points 5.2.2 et 5.2.3).

5.2.1. Mesures des liens totaux par la méthode extractive

Pour évaluer les liens totaux qu'entretient une branche d'activité, on simule l'élimination complète de cette branche de l'économie et on mesure la perte de production qui en résulte. La mesure des liens totaux par la méthode HEM a généralement supplanté les différentes tentatives de mesurer les liens totaux en combinant des mesures en amont et en aval dérivées de la méthode classique.

Les mesures des liens totaux des différentes branches d'activité par la méthode HEM sont estimées dans le cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief.

	Total linkages - Mesures absolues
Hypothetical extraction method	Soit une économie comprenant n branches d'activité. Dans le cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief, le vecteur de production de cette économie est égal à $$\mathrm{x} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}\mathrm{y}^{\mathrm{d}}$$ En définissant $\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$, *la matrice des coefficients techniques dont la* $j^{ème}$ *ligne et la* ^{jème} *colonne ont été remplacées par des zéros* et $\overline{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$, *le vecteur de la demande finale dont le* $j^{ème}$ *élément est mis à zéro*[14], on peut estimer le vecteur de production $\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$ qui serait réalisé dans cette économie **si on enlevait complètement la branche j.** $$\overline{\mathrm{x}}_{(j)} = \left(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{d}}_{(j)}\right)^{-1}\overline{\mathrm{y}}^{\mathrm{d}}_{(j)}$$ Une mesure des **liens totaux** de la branche j consiste à prendre la différence entre ces deux productions $$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} = \mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$$ $\mathrm{T}_{(j)}$ donne une estimation de l'importance de la branche j en mesurant la perte de production qui serait subie par l'économie si cette branche venait à disparaître. *Variante* : exclure la production de la branche j de la production originale. La mesure ***des liens totaux*** devient alors $$\mathrm{T}^{\mathrm{h,v}}_{(j)} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - x_j\right) - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)}$$

Ce scénario a parfois été qualifié de « shut-down of the industry » car la branche d'activité j disparaît complètement. Cella (1984) suggère une autre façon d'extraire une branche pour en mesurer l'importance pour une économie : il propose d'éliminer uniquement les liens que cette branche entretient en amont et en aval avec les autres branches de l'économie, en tant qu'acheteur et fournisseur d'inputs intermédiaires (les éléments a^d_{jj} et y^d_j ne sont pas mis à zéro). Miller et Lahr (2001) montrent que ces deux scénarios donnent les mêmes résultats en termes de diminution de la production des branches d'activité restantes ($\forall\, i \neq j$)[15].

Si l'on désire éliminer l'influence de la taille d'une branche lors de la comparaison des différentes mesures absolues de linkage dérivées de la méthode HEM ou si l'on veut comparer les mesures de linkage HEM (qui ont une unité de mesure), aux mesures de linkage estimées sur base de la méthode classique (qui n'ont pas d'unités), il faut plutôt utiliser des mesures de linkage normalisées. La littérature propose différentes façons de normaliser les mesures HEM.

14 Pour garantir que la production de la branche j soit égale à zéro.

15 Le lecteur intéressé trouvera dans Miller et Lahr (2001), une taxonomie des différentes possibilités d'extraction dans le cadre de matrices L et G partitionnées.

	Total linkages – Mesures normalisées
Hypothetical extraction method	(1) *Baisse de la production par unité de production de la branche j* $(\mathrm{i}'\mathrm{x}-\mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)})/x_j$ ou $\left[(\mathrm{i}'\mathrm{x}-x_j)-\mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)}\right]/x_j$ La mesure de gauche est égale au multiplicateur de production de la production, estimé sur base du modèle entrées-sorties mixte. (2) *Baisse de la production en pourcentage de la production totale originale* $\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}=100*\left[(\mathrm{i}'\mathrm{x}-\mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)})/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ ou $\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}=100*\left[(\mathrm{i}'\mathrm{x}-x_j-\mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)})/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ (3) *Par rapport à la moyenne des* $\overline{\boldsymbol{T}}_{(j)}^{\boldsymbol{h}}$ *ou* $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{(j)}^{\boldsymbol{h}}$ $\hat{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}=n\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}/\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h}}$ ou $\hat{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}=n\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}/\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{T}}_{(j)}^{\mathrm{h,v}}$

5.2.2. Mesures des liens en amont par la méthode extractive

Les mesures des liens en amont des différentes branches d'activité par la méthode extractive sont estimées dans le cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief. Dans ce cas, une branche d'activité est extraite partiellement de l'économie en faisant l'hypothèse qu'elle n'achète plus d'inputs intermédiaires issus de la production intérieure (elles les remplace par des importations).

	Backward linkages - Mesures absolues
Hypothetical extraction method	Dans le cadre d'un modèle entrées-sorties classique de Leontief, le vecteur de production de l'économie est égal à $$\mathrm{x}=\left(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}\mathrm{y}^{\mathrm{d}}$$ En définissant la matrice $\overline{\mathrm{A}}_{(cj)}^{\mathrm{d}}$, *la matrice des coefficients techniques dont la* $j^{ème}$ *colonne a été remplacée par des zéros*, on peut estimer la production qui serait réalisée dans une économie **si la branche j n'achetait aucuns inputs intermédiaires domestiques**. $$\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}=\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{A}}_{(cj)}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}\mathrm{y}^{\mathrm{d}}$$ On peut mesurer les **liens en amont** de la branche j, en prenant la différence entre la production totale originale et la production totale qui serait réalisée si on enlevait les liens en amont de cette branche $$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}}=\mathrm{i}'\mathrm{x}-\mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}$$

Une mesure alternative des liens en amont d'une branche d'activité j par la méthode extractive consiste à conserver ses livraisons intra branche ($a_{jj}^{d}\neq 0$) (Miller et Lahr, 2001).

La littérature propose différentes façons de normaliser ces mesures absolues.

	Backward linkages - Mesures normalisées
Hypothetical extraction method	(1) *Baisse de la production par unité de production de la branche j* $\widetilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}\right)/x_j$ (2) *Baisse de la production en pourcentage de la production totale originale* $\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = 100 * \left[\left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(cj)}\right)/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ (3) *Par rapport à la moyenne des* $\overline{\boldsymbol{B}}_j^h$ $\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = n\,\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{t})_j / \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{t})_j$

5.2.3. Mesures des liens en aval par la méthode extractive

Ces mesures sont estimées dans le cadre d'un modèle entrées-sorties de prix de Ghosh. Dans ce cas, une branche d'activité est extraite partiellement de l'économie en faisant l'hypothèse qu'elle ne livre plus d'inputs intermédiaires à l'appareil de production intérieure (par exemple, dans un scenario où une branche d'activité décide plutôt d'exporter cette production).

	Forward linkages - Mesures absolues
Hypothetical extraction method	Dans le cadre d'un modèle entrées-sorties de prix de Ghosh, le vecteur de production d'une économie est égal à $\mathrm{x}' = \tilde{\mathrm{v}}'\left(\mathrm{I} - \mathrm{B}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}$ En définissant la matrice $\overline{\mathrm{B}}_{(rj)}^{\mathrm{d}}$, *la matrice des coefficients d'allocation dont la* $j^{ème}$ *ligne a été remplacée par des zéros*, on peut estimer la production qui serait réalisée dans une économie si **la branche j ne livrait aucuns inputs intermédiaires** $\overline{\mathrm{x}}'_{(\mathrm{r}j)} = \tilde{v}'\left(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{B}}_{(rj)}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}$ On peut mesurer **les liens en aval** de la branche j, en prenant la différence entre la production totale originale issue du modèle de prix de Ghosh et la production totale qui serait réalisée si on enlevait les liens en aval de la branche j $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{h}} = \mathrm{x}'\mathrm{i} - \overline{\mathrm{x}}'_{(\mathrm{r}j)}\mathrm{i}$

Une mesure alternative des liens en aval d'une branche j par la méthode extractive consiste à ne pas éliminer ses livraisons intra branche ($b_{jj}^{d} \neq 0$) (Miller et Lahr, 2001).

La littérature propose différentes façons de normaliser ces mesures absolues.

	Forward linkages - Mesures normalisées
Hypothetical extraction method	(1) *Baisse de la production par unité de production de la branche j* $\tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(\mathrm{r}j)}\right)/x_j$ (2) *Baisse de la production en pourcentage de la production totale originale* $\overline{\mathrm{F}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = 100 * \left[\left(\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(\mathrm{r}j)}\right)/\mathrm{i}'\mathrm{x}\right]$ (3) *Par rapport à la moyenne des* $\boldsymbol{\overline{F}^{h}_{j}}$ $\hat{\mathrm{F}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = n\,\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{t})_j / \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{F}}(\mathrm{t})_j$

5.2.4. Formalisation du problème d'extraction hypothétique

Pratiquement, l'application de la méthode HEM pour établir un classement des branches d'activité par ordre d'importance nécessite d'extraire chaque branche séparément pour estimer la perte de production qui s'ensuit pour l'économie. Lorsque le nombre de branches est élevé, le travail devient énorme.

Temurshoev (2010) propose « une façon plus simple (et élégante) d'obtenir le même résultat ». Il exprime le problème d'extraction hypothétique sous la forme d'un problème d'optimisation : l'objectif est d'identifier la branche d'activité dont le retrait entraînera la plus grosse réduction de production pour l'économie :

$$\max \left\{\mathrm{i}'\mathrm{x} - \mathrm{i}'\overline{\mathrm{x}}_{(j)} \mid j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$

Il démontre que ce problème peut être réécrit de la façon suivante :

$$\max \left\{m^o_j x_j / l_{jj} \mid j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$

avec $m^o_j = \mathrm{BL}(\mathrm{t})_j$, le multiplicateur de production simple de la branche j, x_j, la production de la branche j et l_{jj}, l'auto-dépendance totale en termes d'inputs intermédiaires de la branche j.

Il définit le ratio $m^o_j x_j / l_{jj} = w^o_j$, 'the gross output worth of sector j'.

Cette formulation permet d'identifier les différents éléments qui sont déterminants dans les mesures des liens totaux dérivés de la méthode HEM. 'The gross output worth of sector j' ne dépend pas uniquement du multiplicateur de production (ou total backward linkage) de cette branche. Elle tient également compte de sa taille (mesurée par sa production, x_j) et de son auto-dépendance totale en termes d'inputs intermédiaires (indiquée par l_{jj})[16]. La taille de sa production a un effet positif sur la mesure,

[16] Avec $l_{jj} = g_{jj}, \forall j$

alors que la dépendance à sa propre production produit l'effet inverse.

	Linkages - Mesures absolues - formalisation
Hypothetical extraction method	**Les liens totaux de la branche j** peuvent être facilement estimés par la méthode HEM, en utilisant la formule suivante $$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} = w^o_j = m^o_j x_j / l_{jj} = \mathrm{BL(t)}_j x_j / l_{jj}$$
	De la même manière, Temurshoev et Oosterhaven (2010) démontrent que la mesure des **liens en amont de la branche j** dérivée par la méthode HEM, est égale à $$\mathrm{B}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\left(\mathrm{BL(t)}_j - 1\right) x_j}{l_{jj}}$$ et que la mesure des **liens en aval de la branche j** dérivée par la méthode HEM, est égale à $$\mathrm{F}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\left(\mathrm{FL(t)}_j - 1\right) x_j}{l_{jj}}$$
	Linkages - Mesures normalisées - formalisation
Hypothetical extraction method	Si l'on est intéressé par des mesures 'sans unité', on aura recours à une **mesure normalisée des liens totaux**, par exemple par unité de production de la branche j : $$\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} / x_j = m^o_j x_j / l_{jj} = \mathrm{BL(t)}_j / l_{jj}$$
	Les **mesures normalisées** (par unité de production de la branche j) **des liens en amont et en aval** dérivées de la méthode HEM sont égales à $$\tilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{(\mathrm{BL(t)}_j - 1)}{l_{jj}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{(\mathrm{FL(t)}_j - 1)}{l_{jj}}$$

En résumé, les travaux de Temurshoev et Oosterhaven permettent :

– de mesurer l'intensité des liens des différentes branches d'activité, par la méthode HEM, sans devoir extraire chaque branche une à une ;

– d'isoler l'importance de l'élément l_{jj} pour déterminer les secteurs clés d'une économie : une branche d'activité dont le processus de production dépend largement d'inputs provenant de sa propre production, a moins de possibilités de diffuser un choc exogène à travers l'économie ;

– de montrer que les différentes mesures de linkage sont reliées entre elles :

$$\mathrm{B}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} \, (\mathrm{BL(t)_j} - 1)}{\mathrm{BL(t)}_j} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{T}^{\mathrm{h}}_{(j)} \, (\mathrm{FL(t)_j} - 1)}{\mathrm{BL(t)}_j}$$

5.3. Généralisation des mesures de linkage

Toutes les mesures de linkage présentées plus haut ont été définies en termes de production. L'importance relative d'une branche pour une économie peut également se définir selon d'autres facteurs économiques, sociaux, environnementaux, par exemples en termes de créations d'emplois, d'émissions polluantes… Aujourd'hui, les analyses de linkage sont largement utilisées pour répondre à des questions environnementales, du type : 'quelles sont les branches d'activité clés qui ont un impact environnemental majeur en termes de consommation d'énergie, de consommation d'eau, d'émissions de CO_2… ?'.

La prise en compte dans le cadre entrées-sorties d'autres indicateurs que la production conduit à une généralisation des différentes mesures de linkage (Temurshoev (2010) et Temurshoev et Oosterhaven (2010)).

Soit π, le vecteur (n x 1) des *coefficients directs d'utilisation/de production* du facteur que l'on souhaite analyser (par exemples, la consommation d'eau ou les émissions de CO_2) par unité de production[17]. L'encadré ci-dessous reprend la forme généralisée des différentes mesures de linkage qui ont été présentées plus haut.

	Mesures généralisées de linkage
The Classical Multiplier Method	La forme généralisée de la **mesure simple des liens totaux en amont de la branche j**, par la méthode classique (*total factor backward linkage*) est égale à : $$\mathrm{BL(t)}_j^{\pi} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i l_{ij}$$
	La forme généralisée de la **mesure simple des liens totaux en aval de la branche j**, par la méthode classique (*total factor forward linkage*) est égale à : $$\mathrm{FL(t)}_j^{\pi} = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}\pi_i$$
The hypothetical extraction method	Dans le cadre de la méthode HEM généralisée, si on élimine **complètement** la branche j, le problème de maximisation devient : $$\max\left\{\pi'\mathrm{x} - \pi'\bar{\mathrm{x}}_{(j)} \,\middle|\, j = 1, \dots, \mathrm{n}\right\}$$ La solution à ce problème est le '*Hypothetical extraction factor total linkage*' $$\mathrm{T}_{(j)}^{\pi,\mathrm{h}} = w_j^{\pi} = \frac{\mathrm{BL(t)}_j^{\pi} x_j}{l_{jj}}$$

[17] Lorsque $\pi_i = 1, \forall i$, les mesures généralisées se réduisent en des mesures de linkage basées sur la production.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">The hypothetical extraction method</td>
<td>Si on élimine partiellement la branche j, on obtient les mesures de linkage généralisées suivantes :

Hypothetical extraction factor backward linkage

$$\mathrm{B}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\left(\mathrm{BL(t)}_j^{\pi} - \pi_j\right)x_j}{l_{jj}}$$
Hypothetical extraction factor forward linkage

$$\mathrm{F}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\left(\mathrm{FL(t)}_j^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)x_j}{l_{jj}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>En divisant ces différentes mesures par la quantité totale produite/utilisée par la branche j du facteur étudié, on obtient les mesures normalisées suivantes :

Hypothetical extraction normalized factor total linkage $\tilde{\mathrm{T}}_{(j)}^{\pi,\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{BL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi}}{\pi_j l_{jj}}$

Hypothetical extraction normalized factor backward linkage $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \left(\mathrm{BL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)/\pi_{\mathrm{j}}\mathrm{l}_{\mathrm{jj}}$

Hypothetical extraction normalized factor forward linkage $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}^{\pi,\mathrm{h}} = \left(\mathrm{FL(t)}_{\mathrm{j}}^{\pi} - \pi_{\mathrm{j}}\right)/\pi_{\mathrm{j}}\mathrm{l}_{\mathrm{jj}}$</td>
</tr>
</table>

Bibliographie

Cella G. (1984), 'The input-Output Measurement of Interindustry Linkages', Oxford Bulletin of Economics and Statistics, vol. 46, n° 1, pp. 73-84.

Chenery H. B. and T. Watanabe (1958), 'International Comparisons of the Structure of Production', Econometrica, vol. 26, n°4 , pp. 487-521.

Dietzenbacher E. and J. A. van der Linden (1997), 'Sectoral and Spatial Linkages in the EC Production Structure', Journal of Regional Science, vol. 37, n° 2, pp. 235-257.

Dietzenbacher E. (1997), 'In Vindication of the Ghosh Model: A Reinterpretation as a Price Model', Journal of Regional Science, vol. 37, n° 4, pp. 629-651.

Dietzenbacher E. (2005), 'More on Multipliers', Journal of Regional Science, vol. 45, n° 2, pp. 421-426.

Eurostat (1996), Système européen des comptes SEC 1995, Luxembourg.

Ghosh A. (1958), 'Input-Output Approach to an Allocation System', Economica, vol. 25, n° 97, pp.58-64.

Guerra A-I. and F. Sancho (2010), 'Merging the Hypothetical Extraction Method and the Classical Multiplier Approach : A Hybrid Possibility', paper (unpublished) presented at the 18th International Input-Output Conference, Sydney, 25-28 June 2010.

Hirschman A. O. (1958), The Strategy of Economic Development, New Haven, Yale University Press.

Institut des Comptes Nationaux (1998), 'Le tableau entrées-sorties 1985 – Une analyse des structures économiques de la Belgique', Bureau fédéral du Plan, Bruxelles.

Institut des Comptes Nationaux (1999), 'Le tableau entrées-sorties 1990 – Une analyse des structures économiques de la Belgique', Bureau fédéral du Plan, Bruxelles.

Institut des Comptes Nationaux (2003), 'Quelques Applications à l'aide du Tableau Entrées-Sorties 1995', Working Paper 18-03, Bureau fédéral du Plan, Bruxelles.

Jones L. (1976), 'The Measurement of Hirschmanian Linkages', Quarterly Journal of Economics, vol. 90, n° 2, pp. 323-333.

Johnson T. G. and S. N. Kulshreshta (1982), 'Exogenizing Agriculture in an Input-Output Model to Estimate Relative Impacts of Different Farm Types', Western Journal of Agricultural Economics, vol. 7, n° 2, pp.187-198.

Koller W. and M. Luptacik (2007), 'Measuring the Economic Importance of an Industry : An Application to the Austrian Agricultural Sector', paper (unpublished) presented at the 16th International Input-Output Conference, Istanbul, 2-6 July 2007.

Leontief W. W. (1936), 'Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United State', Review on Economics and Statistics, vol. 18, n°, pp.105-125.

de Mesnard L. (2002), 'Note about the Concept of 'Net Multipliers', Journal of Regional Science, vol. 42, n° 3, pp. 545-548.

de Mesnard L. (2007a), 'A Critical Comment on Oosterhaven-Stedler Net Multipliers', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 249-271.

de Mesnard L. (2007b), 'Reply to Oosterhaven's: the Net Multiplier is a New Key Sector Indicator', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 285-296.

Miller, R. E. and P. D. Blair (1985), Input-Output Analysis : Foundations and Extensions. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.

Miller, R. E. and P. D. Blair (2009), Input-Output Analysis : Foundations and Extensions. Cambridge, Cambridge University Press, second edition.

Miller, R. E. and M. L. Lahr (2001), 'A Taxonomy of Extractions' in M. L. Lahr and R. E. Miller (eds.) : Regional Science Perspectives in Economics: A festschrift in Memory of Benjamin H. Stevens, Amsterdam, Elsevier Science, pp. 407-441.

Miyazawa K. (1976), Input-Output Analysis ant the Structure of Income Distribution, Heidelberg, Springer.

Oosterhaven J. (1988), 'On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model', Journal of Regional Science, vol. 28, n° 2, pp. 203-217.

Oosterhaven J. (1996), 'Leontief versus Ghoshian Price and Quantity Models', Southern Economic Journal, vol. 62, n° 3, pp. 750-759.

Oosterhaven J. (2007), 'The Net Multiplier is a New Key Sector Indicator: Reply to de Mesnard's Comment', The Annals of Regional Science, vol. 41, n° 2, pp. 273-283.

Oosterhaven J., G. Piek and D. Stedler (1986), 'Theory and Practice of Updating Regional versus Interregional Interindustry Tables', Papers of the Regional Science Association, vol. 59, pp. 57-72.

Oosterhaven J. and D. Stedler (2002), 'Net Multipliers Avoid Exaggerating Impact : With a Bi-Regional Illustration for the Dutch Transportation Sector', Journal of Regional Science, vol. 42, n° 3, pp. 533-543.

Paelinck J., J. de Caevel et J. Degueldre (1965), 'Analyse quantitative de certains phénomènes du développement régional polarisé : essai de simulation statique d'itinéraires de propagation', dans Problèmes de conversion économique : Analyses Théoriques et Etudes Appliquées, Bibliothèque de l'Institut de Sciences Economiques de l'Université de Liège, n°7, p. 341-387.

Rasmussen P. N. (1957), Studies in Intersectoral Relations, Amsterdam, North-Holland.

Strassert G. (1968), 'Zur Bestimmung stratigischer Sektoren mit Hilfe von Input-Output Modellen', Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, vol. 182, pp. 211-215.

Temurshoev U. (2010, March 18), 'Identifying Optimal Sector Groupings with the Hypothetical Extraction Method', in Temurshoev U. : Interdependences : Essays on Cross-Shareholdings, Social Networks and Sectoral Linkages, PhD Theses, University of Groningen.

Temurshoev U. and J. Oosterhaven (2010), 'On Input-Output Linkage Measures', Working Paper Series, University of Groningen.

West G.R. and R.C. Jensen (1980), 'Some Reflections on Input-Output Multipliers', The Annals of Regional Science, vol. 14, n° 2, pp. 77-89.